Дискретная геометрия и геометрия чисел.

В указанную научную группу входят пять докторов наук, являющиеся лидерами в развитии соответствующих направлений дискретной геометрии (И.Х. Сабитов, М.И. Штогрин и Н.П. Долбилин) и геометрии чисел (Н.Г. Мощевитин и И.Д. Шкредов), и четыре молодых исследователя: кандидат физ.-мат. наук А.И. Гарбер (26 лет), получивший за последнее время несколько принципиально новых результатов в теории параллелоэдров и три сильных аспиранта (А.Н. Магазинов, А.А. Гаврилюк, М.А. Козачок (возраст 23–24 года), получивших в самое последнее время важные научные результаты в теории многогранников и, в частности, параллелоэдров.

Исследования проводятся по пяти **основным** направлениям:

1. Параллелоэдры

2. Изометрические вложения двумерных полиэдральных сфер

3. Локальные методы в теории правильных структур

4. Стохастические многогранники

5. Геометрия чисел

1 Параллелоэдры

Параллелоэдры представляют собой чрезвычайно богатый и интересный класс выпуклых многогранников. Понятие 3-мерного параллелоэдра было введено в 1885 году гениальным российским кристаллографом Евграфом Степановичем Федоровым для того, чтобы описать фундаментальную ячейку периодического кристалла. Но в математике и ее приложениях играют важную роль также и многомерные параллелоэдры (упаковки и покрытия пространства шарами, разбиения, комбинаторная геометрия, теория кодирования).

Параллелоэдром размерности d называется d-мерный евклидов многогранник, который параллельными копиями разбивает евклидово пространство $\mathbf{E}^d$.

Параллелоэдры полностью расклассифицированы по комбинаторным типам для размерностей $d = 3$ и 4. Особую роль в этой классификации занимают т.н. *примтивным* параллелоэдры. Это такие параллелоэдры, которые допускают простейшее для данной размерности схождение в каждой вершине разбиения (а, следовательно, простейшее и в грани любой размерности).

Е.С. Федоров описал все 5 комбинаторных типов параллелоэдров (1 из них – примитивный).

Борис Николаевич Делоне нашел (1929 г.) комбинаторные типы 4-мерных параллелоэдров. Их оказалось 52 (3 из них примитивных).

Для $d = 5$ ситуация «выходит из-под контроля». В 1972 году С.С. Рышков и Е.П. Барановский глубоко развив общий метод непрерывных параметров в теории положительных квадратичных форм, разработанный Г.Ф. Вороным (1908 г.) получили все 222 комбинаторных типа примитивных параллелоэдров. Этот результат впоследствии был получен, и тем самым проверен, П. Энгелем (Швейцария). Дальнейшие вычисления П. Энгела непримитивных параллелоэдров показывают, что счет им идет на многие тысячи.

Поэтому на первый план выходит работа по изучению качественной теории параллелоэдров. Начала качественной теории параллелоэдров были заложены Г. Минковским (необходимые условия параллелоэдров, точная верхняя оценка для числа гиперграней), Георгием Феодосьевичем Вороным (метод непрерывных параметров) и Борисом Николаевичем Делоне (геометрия положительных квадратичных форм).

В дальнейшем их исследования были продолжены в работах Б.А. Венкова, А.Д. Александрова, А. Житомирского, С.С. Рышкова, М.И. Штогрина, Н.П. Долбилина, P. McMullen'а, P.Erdahl'а и др.

В лаборатории ведутся исследования по теории параллелоэдров в двух направлениях.

Гипотеза Вороного об аффинной классификации произвольных параллелоэдров параллелоэдрам Вороного (1908)

– новые классы параллелоэдров, для которых гипотеза справедлива (А.И. Гарбер, А.А. Гаврилюк, А.Н. Магазинов, Н.П. Долбилин);

– исследования по проблеме существования дуального разбиения – ослабленной гипотезе Вороного (А.Н. Магазинов);

– геометрия аффинных классов и теоремы единственности (Н.П. Долбилин, А.А. Гаврилюк);

Работа в этом направлении ведется в контакте с R. Erdahl'ом (Канада), а также с J-i. Itoh и C. Nara (Япония).

Комбинаторная теория параллелоэдров. (А.И. Гарбер, М.А.Козачок).
– комбинаторный и поясной диаметры параллелоэдров, верхние оценки (А.И.Гарбер);
– нижние оценки сложности для центрально-симметричных многогранников, 3^d-гипотеза (М.А. Козачок).

2 Изометрические вложения двумерных полиэдральных сфер

Метрическая теория многогранников (И.Х. Сабитов)

За последние 10-15 лет в метрической теории многогранников был получен ряд крупных результатов. Во многом характер исследований был предопределен открытием и доказательством И.Х. Сабитовым теоремы об объеме многогранников (многочлены Сабитова для объема многогранников), из которой немедленно следовало решение известной проблемы «кузнечных мехов». Вместе с тем, в метрической теории многоугольников и многогранников остается ряд старых нерешенных проблем, а также выдвигаются новые нерешенные проблемы. Большинство из них требует привлечения новых алгебраических методов или проведения больших вычислительных работ.

В связи с этим планируется развивать, с одной стороны, расширение списка геометрических задач, допускающих использование методов алгебры, с другой стороны — разрабатывать эффективные алгоритмы численного и символьного решения задач изучаемой области геометрии.

В этом направления в лаборатории получены следующие результаты.

1) Указаны новые классы неизгибаемых многогранников, а именно, пирамиды и бипирамиды, причем установленный признак неизгибаемости пирамид верен в пространстве любой размерности и любой постоянной кривизны, а результат о неизгибаемости бипирамид верен в R^3 для бипирамид любого топологического рода $g > 0$ (для рода $g = 0$ этот вопрос исследован около 40 лет назад), а в размерностях $n > 3$ он верен при некотором простом дополнительном условии.

2) Предложен алгоритм составления многочлена объема для пирамид с любым числом вершин и на его основе составлена программа, дающая в разумное время работы эти многочлены для пирамид с 7 и 8 вершинами (до настоящего времени были работающие программы для многогранников не более чем с 6 вершинами). Стоит подчеркнуть, что этот алгоритм действует для пирамид в пространствах любой размерности и любой постоянной кривизны. Это очень важно, так как вопрос о вычислении объема даже самых простых многогранников в гиперболическом пространстве характеризовался Гауссом как «джунгли».

Планируется поиск алгоритма нахождения многочленов Сабитова объема отличных от пирамиды многогранников с более чем 6 вершинами, но с некоторыми ограничениями на свободу выбора длин ребер многогранника. Параллельно с этим будет проводиться работа по составлению алгоритма для вычисления числа ячеек, получаемых при разбиении n-мерного пространства некоторой системой гиперплоскостей. Это нужно для определения числа возможных топологических типов конфигурационного пространства плоского многоугольника при его изгибании на плоскости.

3 Локальные методы в теории правильных структур

Наиболее подходящим понятием для описания произвольной атомной структуры является множество Делоне (или (r, R)-система). Для описания структур с дальним порядком, таких как кристаллы определяющую роль играют понятие симметрии кристалла и пространственной (или кристаллографической) группы. Математическая модель идеального монокристалла в настоящее время представляет собой множество Делоне, инвариантное относительно некоторой кристаллографической группы. Здесь стоит подчеркнуть, что хорошо известная периодичность кристалла во всех трех измерениях – это не дополнительное требование, а прямое следствие из знаменитой, трудной теоремы Шенфлиса для $d = 3$ (1891 г.) о том, что произвольная кристаллографическая группа содержит трансляционную подгруппу конечного индекса. Задача обобщения теоремы Шенфлиса для $d > 3$ была одним из пунктов 18-й проблемы Гильберта. Ее решил Л. Бибербах (1911 г.)

Таким образом, математическая модель идеального кристалла использует две концепции: множество Делоне, которое имеет локальный характер, и пространственная группа, которая носит глобальный характер. Так как кристаллизация — это процесс, в котором взаимодействуют между собой лишь близлежащие друг к другу атомы, как физики (Р. Фейнманн, Дж. Бернал) так и химики (Л. Поллинг) полагают, что дальний порядок в атомной структуре кристалла вытекает из тех или иных локальных правил, ответственных за характер конфигураций из близлежащих атомов. Наиболее распространенная точка зрения состояла в том, что повторяемость в кристалле локальных конфигураций атомов и есть основная причина периодичности кристалла. В действительности не было никаких строгих результатов до 1970-х г.г., когда Б.Н. Делоне вместе с учениками М.И. Штогриным, Н.П. Долбилиным и Р.В. Галиуллиным начали развивать **локальную** теорию кристалла. Главная цель этой теории было (и есть) строгое обоснование наличия у структуры кристаллографической группы симметрий, если в структуре одинаковые атомы одного наименования образуют конгруэнтные конфигурации. Наиболее принципиальной задачей является нахождение *радиуса правильности*, который есть положительное число ρ, такое что идентичность окрестностей произвольного множества Делоне с параметрами $r > 0$ и $R = 1$ (в евклидовом пространстве можно нормировать R подходящей гомотетией) в пределах шара радиуса ρ гарантирует *правильность* множества Делоне. Множество Делоне называется *правильной системой*, если оно представляет точечную орбиту относительно некоторой кристаллографической группы. Заметим, что согласно данному здесь определению идеального кристалла, последний есть объединение конечного числа правильных систем. В этом направлении получен ряд принципиальных результатов (Н.П. Штогрин, Н.П. Долбилин). Были получены также интересные результаты для двумерных кристаллографических разбиений (Е.В. Коломейкина и Е.С. Маринин).

Из общей теории (Н.П. Долбилин, М.И. Штогрин) следует верхняя оценка для радиуса правильности ρ, которая зависит от размерности d и r, $(R = 1)$. Для $d = 2, 3$ удалось найти верхнюю оценку, независящую от r.

Однако остается нерешенной задача **проблема полуниверсальной оценки**: для $d > 3$ найти верхнюю оценку для радиуса правильности, независящую от r.

Еще более трудный вопрос **проблема универсальной оценки**: можно ли ограничить радиус правильности константой, независящей и от размерности d также?

В рамках данного проекта планируется провести исследование проблемы полуниверсальной верхней оценки (Н.П. Долбилин)

4 Случайные многогранники

Современная вероятностная геометрия возникла в конце 1960-х годов как ответвление интегральной геометрии. Однако, исторически первой проблемой вероятностной геометрии можно считать задачу Буффона об игле (1777). В дальнейшем вероятностные элементы возникали в работах Стьюдента, сформулировавшего впервые статистический критерий χ^2 (1907), и в работах по интегральной геометрии школы Бляшке (1930-е). Обзору результатов и методов вероятностной геометрии посвящена отдельная глава книги “Handbook of Convex Geometry” (1993).

Основной задачей вероятностной геометрии является построение и изучение различных моделей случайных пространственных структур. Хорошо известны как модели случайных дискретных точечных множеств

(так называемые точечные процессы), так и модели случайных множеств более общего вида (например, булева), а также вероятностные модели для других геометрических объектов (таковы, в частности, случайные множества плоскостей в пространстве).

Результаты вероятностной геометрии имеют широкое применение для создания статистических методов в астрономии, распознавании образов, науке о материалах, управлении телекоммуникациями и других областях.

Пусть $X \subset \mathbb{S}_r^d$ — случайное конечное множество точек на сфере

$$\mathbb{S}_r^d = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{d+1}^2 = r^2\}.$$

Тогда комбинаторная структура многогранника $conv\, X$ является объектом изучения в двух известных типах моделей:

1. Выпуклые оболочки случайного множества точек, принадлежащих границе выпуклого тела изучались М. Райтцнером (2009);

2. Комбинаторика выпуклой оболочки конечного множества X точек на сфере $\mathbb{S}_r^d$ совпадает с комбинаторикой разбиения Делоне $\mathbb{S}_r^d$, соответствующего множеству X. Случайные триангуляции Делоне являются классическим объектом исследований в вероятностной геометрии.

Планируется исследовать следующие вопросы (А.Н. Магазинов).

1. Свойства f-вектора выпуклой оболочки пуассоновского точечного процесса на торе Клиффорда-Хопфа $T^2 \subset \mathbb{S}^3_{\sqrt{2}}$.
2. Свойства f-вектора выпуклой оболочки N независимых точек на $\mathbb{S}^d$, подчиненных равномерному распределению.

5 Геометрия чисел

Исследования по геометрии чисел в лаборатории ведутся по нескольким направлениям.

Появление геометрии чисел как метода исследований связано с именами Г. Минковского и Г. Вороного. Одна из областей — теория многомерных линейных диофантовых приближений, в основном, была построена А.Я. Хинчиным и В. Ярником в 1920–1950-х годах. Важный вклад был сделан К. Малером; он обосновал многие конструкции геометрии чисел, в частности, теорию сходимости в пространствах решеток, теорию присоединенных тел, компаундов и псевдокомпаундов.

После работ Кассесла и Давенпорта наиболее значительные достижения принадлежат В. Шмидту. Кроме того, в 1970–80-х года он сформулировал ряд открытых проблем, имеющих важное значение для современной теории. Многие из этих проблем решены. Их решение было связано с появлением новых прорывных методов в геометрии чиел.

В частности, так называемая BAD-гипотеза Шмидта (двойственная знаменитой гипотезе Литтлвуда о произведении трех линейных форм) в 2010 году была доказана Д. Бодягиным, А. Поллингтоном и С. Велани. В 2012 году локальный вариант доказательства был предложен Жинпенгом Аном. Следует отметить, что Н.Г. Мощевитин решил три задачи, поставленные В. Шмидтом, в частности он построил контрпример к гипотезе о приближениях с положительными числами. Н.Г. Мощевитин доказал гипотезу Шмидта о поведении последовательных минимумов однопараметрических семейств решеток. Интересно, что в 2011–2012 В. Шмидт и Л. Зуммерер разработали совершенно новый подход к исследованию минимумов однопараметрических семеств решеток, связанный с тонким анализом специальных кусочно линейных функций, возникающих при рассмотрении псевдокомпаундов Малера. Этот метод позволил улучшить старые неравенства В. Ярника для равномерной и обыкновенной диофантовых экспонент в случае совместных приближений нескольких чисел и в случае одной линейной формы от нескольких переменных. Н.Г. Мощевитин и О.Н. Герман недавно предложили чисто геометрическое доказательство следствий из теоремы Шмидта–Зуммерера. Кроме того, с помощью анализа четырехмерных решеток Н.Г. Мощевитин усилил неравенства Ярника для совместных приближений трех чисел и для одной линейной формы от трех переменных, причем результат оказался сильнее следствий Шмидта-Зуммерера. Совсем недавно Н.Г. Мощевитин получил соотетствующий результат об усилении неравенства Ярника для систем линейных форм от двух переменных. Метод Шмидта-Зуммерера не позволяет работать с системами линейных форм более чем от одной переменной.

В последнее время появилось достаточно много работ, связанных с применением теории динамических систем в задачах геометрии чисел. Получено много красивых и важных результатов. Здесь следует упомянуть работы таких математиков, как Г. Маргулис, Д. Клейнбок, М. Айзиедлер, Е. Линденштраусс, Б. Вайс, У. Шапира. Как правило, доказательства, поучаемые методами динамики довольно сложны. Н.Г. Мощевитин доказал ряд результатов, полученных этими математиками, с помощью простых геометрических соображений, восходящих к Минковскому и Хинчину.

Мультипликативные подгруппы конечных полей (И.Д. Шкредов)

Вопрос о равномерной распределенности элементов мультипликативных подгрупп конечных полей является знаменитой классической задачей теории чисел. Первый результат здесь принадлежит, по-видимому, Гауссу, который доказал, что простейшая нетривиальная подгруппа, а именно, квадратичные вычеты, является равномерно распределенной. Равномерная распределенность произвольных подгрупп изучалась затем многими математиками. Назовем лишь Давенпорта, Монтгомери, Вона, Гарсиа, Волох, Хиф-Брауна и Вули. Интерес аналитиков к этому вопросу обусловлен, помимо всего прочего, еще и тем, что он имеет приложения к классической задаче теории чисел — проблеме Варинга. Систематическое изложение теории мультипликативных подгрупп можно найти в известной книге Конягина–Шпарлинского, где по-видимому, аналитический подход к данной задаче изложен во всей полноте. Новую жизнь данная область обрела после привлечения новых методов аддитивной комбинаторики. Здесь стоит отметить таких авторов как Бурген и Тао, а также Каца, Конягина, Чанг, Глибичука, Гараева, Шпарлинского и др. Одна из ключевых идей этого подхода заключалась в получении аналога знаменитой теоремы Семереди–Троттера из дискретной геометрии о числе инциденций точек и прямых на плоскости. Вопрос о равномерной распределенности мультипликативных подгрупп имеет, помимо теории чисел, многочисленные приложения к теории динамических систем, криптографии, аддитивной комбинаторики и т.д. Именно привлечение геометрических идей, в частности, конечной версии теоремы Семереди–Троттера, позволило так широко распространить полученные аддитивно-комбинаторные результаты. Тем не менее здесь остается нерешенным целый ряд проблем, например, вопрос о зависимости между размером подгруппы и ее (аддитивными) базисными свойствами. Для достижения прогресса в этой области мы применяем новейшие комбинаторно-аналитические методы. Основной подход состоит в изучении геометрических свойств декартовых произведений нескольких множеств: их проекций, пересечений с прямыми, гиперплоскостями, подсчет числа всевозможных инциденций псевдокривых и т. д.