Оптимальные сети: описание исследований.

Оптимизационные задачи, представляют собой, видимо, наиболее естественные и поэтому наиболее популярные из изучаемых задач. Каждый день миллионы людей сталкиваются с проблемами такого типа в самых разных областях человеческой деятельности. Задолго до Мопертюи, сформулировавшего знаменитый *принцип наименьшего действия* в XVIII веке, люди старались достигать своих целей с наименьшими затратами, т.е. люди инстинктивно ставили и решали оптимизационные задачи. **Геометрические оптимизационные задачи** очень популярны не только благодаря своей наглядности, но и также благодаря широкому спектру приложений, таких как, например, транспортная проблема. Также важно подчеркнуть междисциплинарный характер проблем такого типа. В этой области работает много специалистов по дискретной и дифференциальной геометрии, теории графов, алгебре, вариационному исчислению, и т.д. Наша работа посвящена, главным образом, различным обобщениям классической проблемы Штейнера, т.е. задачам **оптимального соединения**.

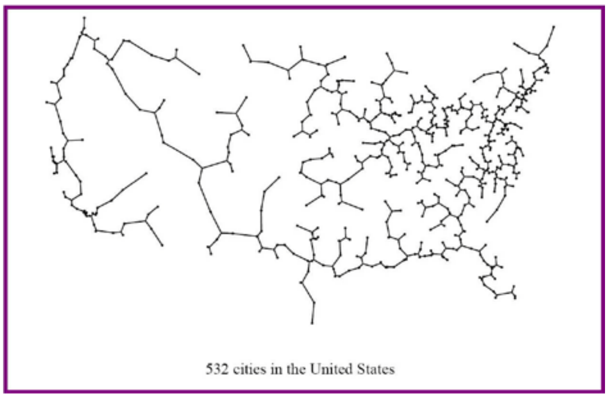

Рисунок 1. Минимальная сеть, соединяющая 532 крупных города США и Канады.

В одной из классических постановок этой задачи требуется найти связный одномерный континуум (сеть) минимальной возможной длины, соединяющий данное конечное множество точек-терминалов в объемлющем метрическом пространстве (нормированном пространстве, римановом многообразии, поверхности многогранника).

Наша группа работает в нескольких областях.

1) Исследование геометрии, методов и алгоритмов построения оптимальных сетей, связывающих данное граничное множество, в частности, экстремальных сетей на Евклидовой плоскости, на нормированных плоскостях, на поверхностях многогранников, на поверхностях ограниченной кривизны в смысле Александрова, в евклидовом пространстве, в нормированном пространстве.

а) Локально минимальные сети на евклидовой плоскости. Для этого случая имеется удобная характеристика структуры плоских бинарных деревьев, так называемое число вращения введенное Ивановым и Тужилиным. Ими показано, что число вращения минимального бинарного дерева ограничено сверху линейной функцией от числа уровней выпуклости граничного множества. Кроме того, разработан язык, позволяющий перечислять бинарные деревья с ограниченным числом вращения (язык треугольных паркетов). Это дает возможность сократить перебор возможных структур минимальных деревьев для данного граничного множества.

Рисунок 2. Минимальная сеть, соединяющая вершины правильного многоугольника, и треугольный паркет, задающий структуру этого дерева.

b) Экстремальные сети в нормированных пространствах. Для нормированных плоскостей также известны критерии локальной минимальности. В этом случае также актуально описание экстремальных сетей, класс которых, вообще говоря, отличается от класса локально минимальных. Такое описание получено для случая лямбда геометрий при достаточно больших лямбда. Интересно разработать аналог алгоритма Мелзака для нормированных плоскостей. Это позволило бы как строить локально минимальные сети, так и набрать экспериментальный материал для изучения свойств экстремальных сетей. Также на случай нормированных плоскостей можно обобщить известную формулу Максвелла вычисления длины сети.

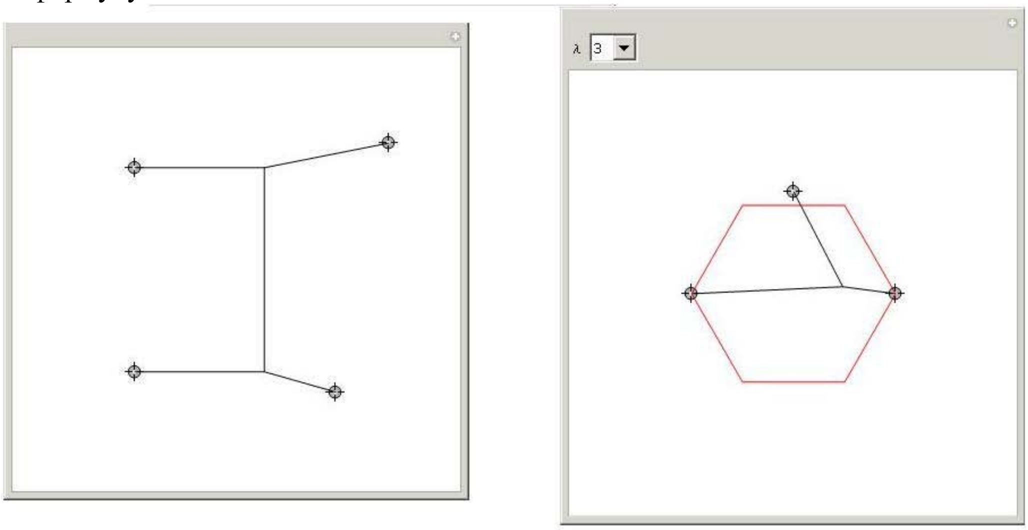

Рисунок 3. Минимальные сети для четырех точек на манхеттенской плоскости и для трех точек на 3-плосоксти.

c) Замкнутые минимальные сети. Для замкнутых поверхностей естественно ставить вопрос об устройстве замкнутых (без границы) экстремальных сетей. Для поверхностей постоянной неотрицательной кривизны такие сети полностью описаны в работах Хеппеша, Иванова, Птицыной и Тужилина. Также полный ответ получен для поверхности равногранного тетраэдра. Отметим, что замкнутые сети не обязаны, вообще говоря, существовать на поверхности многогранника. Необходимым условием является π-рациональность полной кривизны каждой грани такой сети. Недавно построены примеры, показывающие, что данное условие не является достаточным. Общая задача состоит в описании достаточных условий существования замкнутых минимальных сетей на многогранных поверхностях, а также в описании таких сетей на поверхностях отрицательной кривизны.

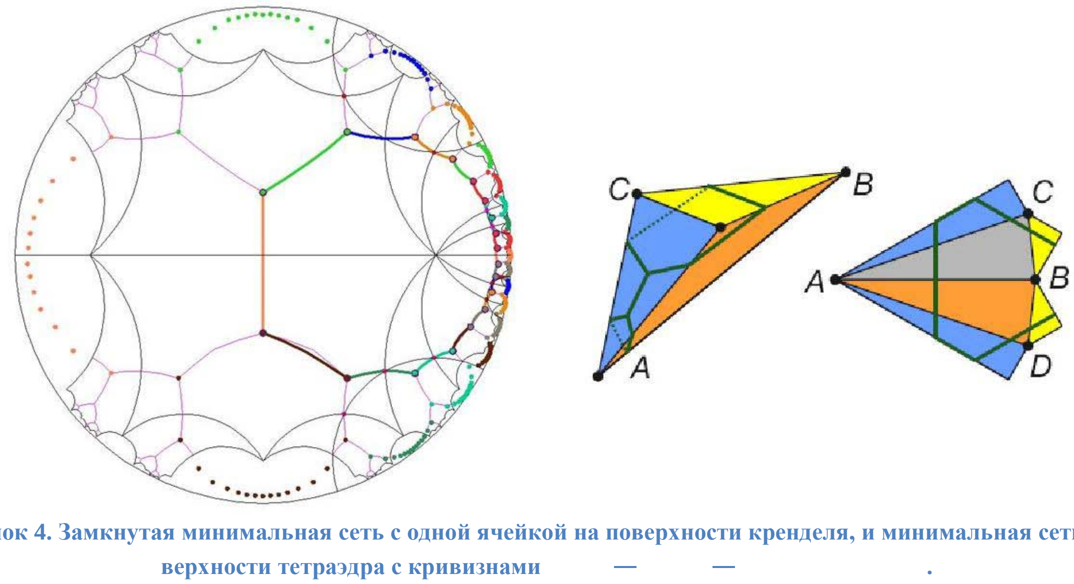

Рисунок 4. Замкнутая минимальная сеть с одной ячейкой на поверхности кренделя, и минимальная сеть на поверхности тетраэдра с кривизнами — — .

d) Стабилизация минимальных сетей и минимальные леса. Стабилизация это технический аппарат, строить примеры кратчайших сетей с заданными свойствами. Идея метода состоит в превращении локально минимальной сети в кратчайшую путем добавления граничных вершин степени два. При этом сеть не меняется как подмножество объемлющего пространства. Иванов, Съедина и Тужилин разработали метод, позволяющий объединять два локально минимальных дерева и соединяющий их кратчайший отрезок в кратчайшее дерево с помощью стабилизации исходнях деревьев, но без изменений соединяющего отрезка. Это позволило им получить обобщение известного свойства лунки ребра кратчайшего дерева, описав поведение таких деревьев в окрестностях лунок их ребер. Следующим шагом стало бы обобщение этих результатов на случай нескольких деревьев и соединяющего их леса. При этом следует также разработать теорию минимальных лесов с данной границей.

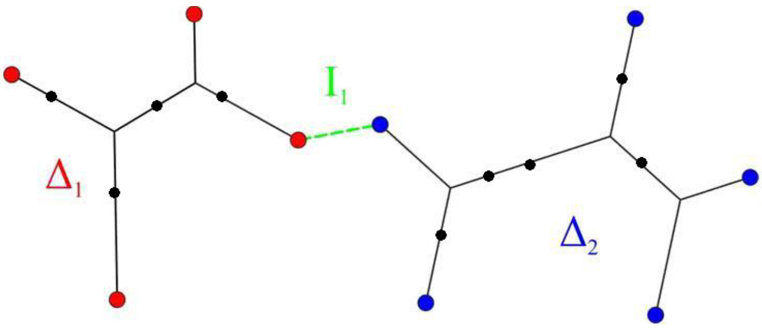

Рисунок 5. Стабилизация дерева, полученного объединением двух локально минимальных деревьев и соединяющего их отрезка.

2) Геометрия минимальных внутренних остовных деревьев и внутренних кратчайших деревьев для вложенных и погруженных плоских многоугольников.

Для данного многоугольника (погруженного или вложенного), внутреннее дерево – это дерево, лежащее внутри этого многоугольника. Естественная задача состоит в том, чтобы соединить вершины многоугольника кратчайшим внутренним деревом или кратчайшим внутренним остовным деревом. Оказалось, что в этом случае естественно возникают аналоги диаграмм Вороного и триангуляций Делоне, причем минимальное внутреннее остовное дерево, как и в классическом случае, оказывается подграфом графа Делоне. Грани графа Делоне могут быть в этом случае устроены более сложно, чем в классическом случае. Также интересно исследовать экстремальные свойства графа Делоне для этого случая. Возможно, эти результаты также могут быть обобщены на случай поверхностей Александрова ограниченной кривизны.

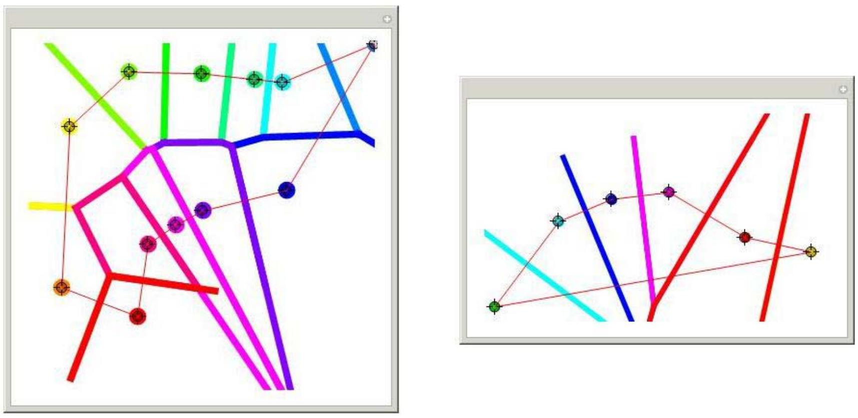

Рисунок 6. Диаграмма Вороного плоских многоугольников. Многоугольник слева является единственной гранью соответствующего графа Делоне.

3) Исследование геометрии, методов и алгоритмов построения минимальных заполнений конечных и счетных метрических пространств.

Изучаются связи между геометрией метрического пространства и топологией его минимального заполнения. Иванов и Тужилин обобщили понятие минимального заполнения в смысле Громова на случай конечных метрических пространств. В этом случае заполнения представляют собой взвешенные графы, соединяющие данное метрическое пространство. Минимальные заполнения оказались тесно связаны с кратчайшими деревьям. Они соответствуют минимальным кратчайшим деревьям, затягивающим изометричный образ данного метрического пространства, где минимум берется по всевозможным изометричным вложениям.

Здесь на очереди следующие вопросы.
a) Недавно была получена формула, представляющая вес минимального заполнения конечного метрического пространства в терминах так называемых мультиобходов. Возникает задача эффективного выбора мультиобходов, необходимых для вычисления, с целью получения полиномиального алгоритма вычисления веса.
b) Изучение свойств минимальных заполнений аддитивных и псевдоаддитивных пространств.
c) Для конечных подмножеств данного метрического пространства изучить связи между весом минимального заполнения и длинами кратчайшего и минимального остовного деревьев.
d) Анализ вероятностей возможных топологий минимальных заполнений.
e) Изучение вопросов единственности для минимальных заполнений пространств в «общем положении».

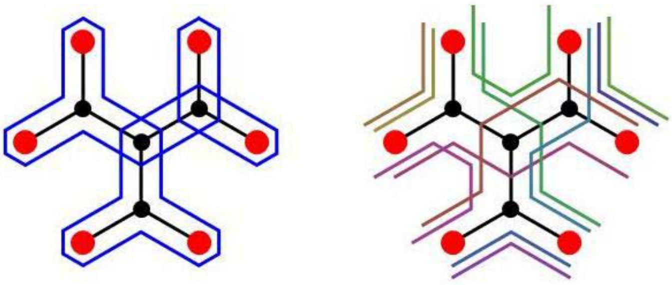

Рисунок 7. Мультиобход и составляющие его пути.

3) Геометрия пространства хаусдорфа и пространства Громова-Хаусдорфа.
Изучение «элементарной геометрии» этих пространств, методов и алгоритмов построения кратчайших кривых и кратчайших сетей в них. Методы вычисления расстояний между конечными множествами (конечными метрическими пространствами) в этих пространствах. Связь с минимальными деревьями, минимальными заполнениями. Приложения к сравнению изображений.