

Триангуляции Делоне и симплициальные сетки

7 июня 2012 г.

Оглавление

1	Двумерные триангуляции Делоне	2
1.1	Вороной и Делоне	2
1.2	Реберные флипы	5
1.3	Построение с элементами случайности	9
1.4	Символьное возмущение	13
	Задачи	17
2	Треугольные сетки	19
2.1	Несвободные триангуляции	19
2.2	Улучшение Делоне	22
2.3	Анализ алгоритма	25
	Задачи	30
3	Трехмерные триангуляции Делоне	32
3.1	Подъем и полярность	32
3.2	Расстояние с весом	36
3.3	Флипы	39
3.4	Алгоритм последовательного добавления	41
	Задачи	44
4	Тетраэдрические сетки	47
4.1	Сетки для полиэдров	47
4.2	Форма тетраэдра	51
4.3	Улучшение Делоне	55
4.4	Выделение воздушного змея	59
	Задачи	63

Глава 1

Двумерные триангуляции Делоне

В четырех разделах данной главы исследуются триангуляции Делоне конечных множеств точек на плоскости. В разделе 1.1 вводятся триангуляции Делоне как дуальные к диаграммам Вороного. Раздел 1.2 посвящен описанию алгоритма построения триангуляции Делоне как последовательности реберных флипов. Несмотря на то, что время действия алгоритма и не является наилучшим из всех возможных, но тот факт, что он заканчивает работу позволяет получить нетривиальные структурные свойства триангуляции Делоне на плоскости. В разделе 1.3 построен алгоритм, использующие последовательное добавление точек, причем случайное время выполнения такого алгоритма является наилучшим из возможных. Реализация геометрического алгоритма является непростой задачей и алгоритмы разделов 1.2 и 1.3 не исключения. В разделе 1.4 обсуждается использование точной арифметики и символических возмущений для решения вычислительных сложностей с помощью алгебраических методов.

1.1 Вороной и Делоне

В данной лекции вводятся триангуляции Делоне как дуальные к диаграммам Вороного. Обсуждаются роль общего положения точек в определении и объясняются некоторые основные свойства триангуляция Делоне.

Диаграммы Вороного

Определение диаграмм Вороного как сопоставления каждой точке конечного множества ее “области влияния”.

Пусть дано множество $S \in \mathbb{R}^2$ из n точек. Определим *области Вороного* для данной точки $p \in S$, как множества точек $x \in \mathbb{R}^2$, которые не дальше от нее чем от всех остальных точек S :

$$V_p = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - p\| \leq \|x - q\|, \forall q \in S\}.$$

Если $H_{pq} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - p\| \leq \|x - q\|\}$ обозначает полуплоскость из точек, которые ближе к p чем к q , то область Вороного для p это пересечения полуплоскостей H_{pq} для всех $q \in S \setminus p$, то есть V_p — выпуклое многоугольное множество с не более чем $n - 1$ ребром, возможно неограниченное.

Любая точка $x \in \mathbb{R}^2$ имеет хотя бы одну ближайшую точку из S и поэтому лежит хотя бы в одной области Вороного. Отсюда следует, что области Вороного разбивают всю плоскость. Две области Вороного разделяются срединным перпендикуляром к

отрезку, соединяющему порождающие их точки, а значит области Вороного не пересекаются по внутренним точкам и если точка принадлежит двум областям Вороного, то она лежит на соответствующем срединном перпендикуляре. Области Вороного вместе с их общими ребрами и вершинами образуют *диаграмму Вороного*.

Триангуляции Делоне

Если по данной диаграмме Вороного мы построим дуальную, нарисовав *ребра Делоне* для каждой пары вершин $p, q \in S$, у областей Вороного которых есть общий отрезок границы. В общем случае ребра Делоне разбивают выпуклую оболочку S на треугольники, которые называются *треугольниками Делоне*.

Для подсчета количества ребер будем использовать некоторые результаты о *плоских графах*, то есть графах которые могут быть нарисованы на плоскости без пересечения ребер. Это верно, что ребра Делоне не пересекаются, однако чтобы пока это не доказывать, мы нарисуем ребра в виде ломаной, проходящей через точку на общем отрезке. С помощью формулы Эйлера можно получить (и надо это сделать), что в плоском графе с $n \geq 3$ вершинами не более $3n - 6$ ребер и $2n - 4$ граней. Такие же границы верны и для количества ребер и треугольников Делоне. Существует биекция между ребрами Вороного и ребрами Делоне, поэтому ребер Вороного также не больше $3n - 6$. Аналогично $2n - 4$ — верхняя граница для количества вершин в диаграмме Вороного.

Невырожденность

В определении триангуляции Делоне есть одна неопределенность если в одной точке u сходятся четыре или больше областей Вороного. Точки, порождающие эти четыре или больше областей, находятся на одном и том же расстоянии от u , а значит они лежат на одной окружности с центром в u . С точки зрения теории вероятности, шанс на то, что выбранные четыре точки лежат на одной окружности, равен нулю, так как окружность, задаваемая первыми тремя точками, имеет меру нуль в \mathbb{R}^2 . Обычно в этом случае говорят, что четыре точки на одной окружности образуют вырожденный или особый случай. Сколь угодно малого возмущения достаточно, чтобы избавиться от вырожденности и свести особый случай к общему.

Часто мы предполагаем, что точки находятся в общем положении, то есть отсутствует любая вырожденность. На самом деле это означает, что мы будем рассматривать вырожденные случаи позже. Рассмотрение особых случаев обычно происходит с помощью возмущений (описанных явно или неявно) или с помощью полного перебора.

Окружность и степень

В данном случае мы рассматриваем точки общего положения. Для данного треугольника Делоне abc рассмотрим описанную окружность, которая является единственной окружностью, проходящей через точки a, b и c . Ее центром является вершина Вороного $u = V_a \cap V_b \cap V_c$, а радиусом $\rho = \|u - a\| = \|u - b\| = \|u - c\|$. Мы будем называть эту окружность *пустой*, так как внутри нее нет точек из S . Пустые окружности характеризуют треугольники Делоне.

Утверждение 1.1 (Лемма о пустой окружности). Пусть $S \subset \mathbb{R}^2$ — конечное множество точек общего положения и $a, b, c \in S$. Тогда abc является треугольником Делоне в том и только том случае когда описанная окружность треугольника abc является пустой.

В настоящий момент этот факт не совсем очевиден, но вместо того чтобы его доказывать мы сосредоточим внимание на новом понятии расстояния до окружности. Степенью точки $x \in \mathbb{R}^2$ относительно окружности U с центром u и радиусом ρ называется число

$$\pi_U(x) = \|x - u\|^2 - \rho^2.$$

Если x находится вне окружности U , то $\pi_U(x)$ это квадрат длины касательной из точки x к U . В любом случае степень положительна для точек вне окружности, нулевая для точек на окружности и отрицательна для точек внутри окружности. В некоторых случаях мы будем рассматривать окружность как точку с весом, а степень точки как расстояние с весом. Для двух фиксированных окружностей множество точек с равной степенью является прямой, которая называется *радикальной осью*. Возможны три расположения окружностей на плоскости и три соответствующих расположения радикальных осей.

Ацикличность

Мы используем понятие степени для того, чтобы доказать ацикличность треугольников Делоне. Пусть $x \in \mathbb{R}^2$ произвольная, но фиксированная точка положения наблюдателя. Мы будем говорить, что треугольник abc находится *перед* треугольником def если найдется луч с началом в x , который вначале пересекает abc , а потом def . Будем писать $abc \prec def$ если abc находится перед def . Множество треугольников Делоне вместе с \prec образует отношение. В общем случае в отношениях могут быть циклы $\tau_0 \prec \tau_1 \prec \dots \prec \tau_n \prec \tau_0$. Такие циклы могут появляться и в произвольных триангуляциях, но они не могут появляться в триангуляциях, определяемых пустыми

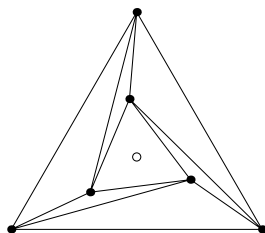


Рис. 1.1: При взгляде из центральной точки три вытянутых треугольника образуют треугольник относительно частичного порядка “перед”.

окружностями.

Лемма 1.2 (Лемма об ацикличности). Отношение треугольников “перед” является ациклическим для треугольников Делоне, построенных по конечному множеству $S \in \mathbb{R}^2$.

Доказательство. Мы покажем, что если $abc \prec def$, то степень x относительно описанной окружности треугольника abc меньше степени относительно описанной окружности треугольника def . Обозначим $abc = \tau_0$ и будем писать $\pi_0(x)$ вместо

степени x относительно описанной окружности треугольника abc . Также определим $def = \tau_k$ и $\pi_k(x)$. Так как S конечно, то мы можем выбрать луч с началом в x , который пересекает треугольники abc и def и не содержит точек из S . Данный луч пересекает последовательно треугольников Делоне

$$abc = \tau_0 \prec \tau_1 \prec \dots \prec \tau_k = def.$$

Для любых двух последовательных треугольников, радикальная ось их описанных окружностей содержит их общее ребро. В силу того, что третья вершина τ_{i+1} лежит вне описанной окружности τ_i , верно неравенство $\pi_i(x) < \pi_{i+1}(x)$ при $0 \leq i \leq k - 1$. Следовательно $\pi_0(x) < \pi_k(x)$. Ацикличность отношения \prec следует из того, что действительные числа на могут возрастать по циклу. \square

1.2 Реберные флипы

В данном разделе будет получено локальное условие на ребра, которому могут удовлетворять только триангуляции Делоне, а также получен алгоритм для построения триангуляций Делоне, основанный на реберных флипах. Корректность данного алгоритма влечет за собой тот факт, что среди всех триангуляций данного конечного множества триангуляция Делоне максимизирует наименьший угол.

Пустые окружности

Напомним Лемму о пустой окружности, которая утверждает, что три точки $a, b, c \in S$ образуют треугольник Делоне в том и только том случае когда окружность, которая проходит через точки a, b, c является пустой. Ребро Делоне ab принадлежит одному или двум треугольникам Делоне. В обоих случаях существует пучок пустых окружностей проходящих через a и b . Центрами окружностей этого пучка являются точки ребра Вороного $V_a \cap V_b$. Аналогичной Лемме о пустой окружности является Лемма об опорной окружности для ребер.

Утверждение 1.3 (Лемма об опорной окружности). Пусть $S \subset \mathbb{R}^2$ — конечное множество точек в общем положении и $a, b \in S$. Ребро ab является ребром Делоне в том и только том случае когда существует пустая окружность, проходящая через a и b .

Лемма Делоне

Под *триангуляцией* мы будем понимать набор треугольников вместе с их ребрами и вершинами. Триангуляция K *триангулирует* множество S если треугольники разбивают выпуклую оболочку S и их множество вершин совпадает с S . Ребро $ab \in K$ называется *локальным ребром Делоне* если:

- (i). оно принадлежит одному треугольнику и лежит на выпуклой оболочке S или
- (ii). оно принадлежит двум треугольникам abc и abd и вершина d лежит вне описанной окружности треугольника abc .

Локальное ребро Делоне не обязательно является ребром Делоне и достаточно просто построить такой пример. Однако, если *каждое* ребро триангуляции является локальным ребром Делоне, то можно показать, что *все* ребра являются ребрами Делоне.

Лемма 1.4 (Лемма Делоне). *Если каждое ребро триангуляции K является локальным ребром Делоне, то K есть триангуляция Делоне S .*

Доказательство. Рассмотрим треугольник $abc \in K$ и точку $p \in K$ отличную от a, b, c . Мы покажем, что p лежит вне описанной окружности треугольника abc . Из этого следует, что ни одна из вершин триангуляции не лежит ни в одной из окружностей, то есть K является триангуляцией Делоне. Выберем такую точку x внутри abc , что отрезок px не содержит точек из S отличных от p . Пусть $abc = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k$ — последовательность треугольников, которые пересекают отрезок xp . Будем писать $\pi_i(p)$ для степени точки p относительно описанной окружности треугольника τ_i . В силу того, что все ребра триангуляции являются локальными ребрами Делоне, верно неравенство $\pi_0(p) > \pi_1(p) > \dots > \pi_k(p)$. Точка p является одной из вершин последнего треугольника, а значит $\pi_k(p) = 0$ и $\pi_0(p) > 0$, то есть точка p лежит вне описанной окружности треугольника abc . \square

Алгоритм реберных флипов

Если ребро ab лежит в двух треугольниках abc и abd , объединение которых есть выпуклый четырехугольник, то мы можем сделать *флип* ребра ab на ребро cd . Формально это означает, что мы удаляем элементы ab, abc, acd из триангуляции и добавляем cd, acd, bcd . Картинка с флипом выглядит как взгляд на тетраэдр с двух противоположных сторон. Можно использовать алгоритм флипов для того, чтобы преобразовать произвольную триангуляцию в триангуляцию Делоне. Данный алгоритм использует стек и сохраняет свойство, что если ребро не является локальным ребром Делоне, то оно присутствует в стеке. Чтобы избежать дублирования мы отмечаем те ребра, которые присутствуют в стеке.

```

while стек непуст do
  pop  $ab$  из стека и снять отметку;
  if  $ab$  не локальное ребро Делоне then
    сделать флип с ребрами  $ab$  и  $cd$ ;
    for  $xy \in \{ac, cb, bd, da\}$  do
      if  $xy$  не отмечено then
        отметить  $xy$  и добавить его в стек
      endif
    endfor
  endif
endwhile

```

Пусть в множестве n точек. Количество памяти, которое использует данный алгоритм есть $O(n)$, так как в триангуляции не больше $3n - 6$ ребер и в стеке содержится не более одной копии каждого ребра. В момент времени, когда алгоритм закончит выполняться, любое ребро является локальным ребром Делоне. По Лемме Делоне, триангуляция в этот момент будет триангуляцией Делоне для данного множества.

Окружность и плоскость

Перед тем как доказывать, что алгоритм закончит работу, мы интерпретируем операцию флипа на тетраэдре в трехмерном пространстве. Пусть $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$ — вертикальные

проекция точек a, b, c, d плоскости x_1x_2 на параболоид, который является графиком $\Pi : x_3 = x_1^2 + x_2^2$.

Утверждение 1.5 (Лемма о поднятой окружности). *Точка d лежит внутри описанной окружности треугольника abc если и только если точка \hat{d} лежит вертикально ниже плоскости, проходящей через точки $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$.*

Доказательство. Пусть U — описанная окружность треугольника abc и H — плоскость проходящая через точки $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$. Вначале мы покажем, что U есть вертикальная проекция $H \cap \text{gf } \Pi$. Преобразуем пространство, отображив произвольную точку (x_1, x_2, x_3) в точку $(x_1, x_2, x_3 - x_1^2 - x_2^2)$. Точки $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$ отображаются обратно в точки a, b, c, d и параболоид Π отображается в плоскость x_1x_2 . Плоскость H становится параболоидом, который проходит через точки a, b и c . Он пересекает плоскость x_1x_2 по описанной окружности abc . Плоскость H разбивает $\text{gf } \Pi$ на кусок ниже H , кривую в H и кусок выше H . Кривая в H проецируется в описанную окружность треугольника abc , а кусок под H отображается в открытый круг внутри этой окружности. Отсюда следует, что \hat{d} принадлежит части параболоида ниже H если и только если d лежит внутри описанной окружности треугольника abc . \square

Время работы

Операция флипа ребра ab на cd соответствует приклеиванию тетраэдра $\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}$ снизу к треугольникам $\hat{a}\hat{b}\hat{c}$ и $\hat{a}\hat{b}\hat{d}$. Тогда наш алгоритм можно понимать как последовательность приклеиваний тетраэдров. После того, как мы приклеили тетраэдр $\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}$ мы не сможем приклеить другой тетраэдр сразу под ребром $\hat{a}\hat{b}$. Другими словами, если мы однажды сделали флип с ребром ab , то мы не сможем снова получить ребро ab с помощью какого-либо флипа. Отсюда следует, что всего флипов будет не больше чем ребер соединяющих n точек, то есть $\binom{n}{2}$. Каждый флип требует константу времени, а значит общее время работы равно $O(n^2)$.

Существуют случаи, в которых алгоритм требует $\Theta(n^2)$ флипов для того, чтобы преобразовать начальную триангуляцию в триангуляцию Делоне, и один из таких примеров показан на следующем рисунке 1.2. Рассмотрим выпуклую верхнюю и во-

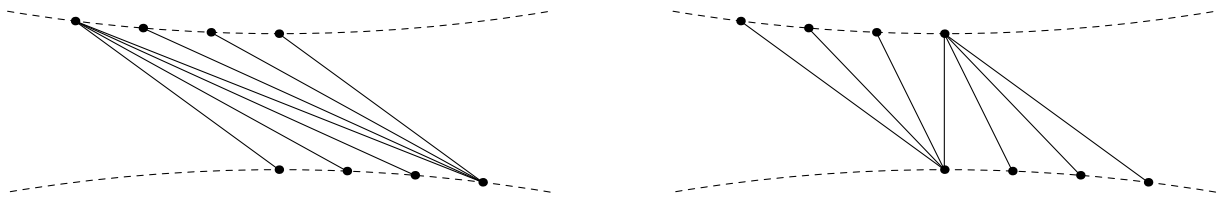


Рис. 1.2: На левом рисунке изображена примерно треть ребер начальной триангуляции, а на правом такое же количество ребер итоговой триангуляции Делоне.

гнутую нижнюю кривые, поместим на каждую из них по m точек таким образом, что верхние точки лежат слева от нижних. Начальная конфигурация такова: правая нижняя точка соединена со всеми сверху и левая верхняя во всеми снизу, а в триангуляции Делоне правая точка сверху соединена со всеми снизу и левая точка снизу соединена со всеми сверху (в обоих случаях еще есть отрезки, соединяющие соседние точки на одной кривой). Для каждой точки подсчитаем ее расстояние до середины и для всех ребер сложим минимумы вкладов их вершин. В начальной триангуляции

общая сумма имеет порядок n^2 , а в триангуляции Делоне — 0. Каждый флип сдвигает конец ребра на одну позицию, а значит уменьшает сумму не более чем на 1. Откуда следует нижняя оценка порядка m^2 на количество флипов.

Свойство максимальности минимального угла

Каждый флип заменяет два старых треугольника на два новых. Таким образом в триангуляции меняются шесть углов. На рисунке 1.3 новыми углами будут $\gamma_1, \delta_1, \beta_1 + \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ и $\alpha_1 + \alpha_2$, а старыми $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 + \gamma_2, \alpha_2, \beta_2, \delta_1 + \delta_2$. Мы утверждаем, что для

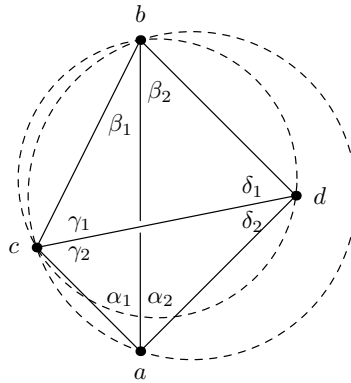


Рис. 1.3: Флип ребра ab на ребро cd . Если ребро ab не является локальным ребром Делоне, то объединение двух треугольников выпукло и cd — локальное ребро Делоне.

каждого нового угла найдется старый, который его не превосходит. В самом деле, $\gamma_1 \geq \alpha_2$, так как оба эти угла лежат напротив ребра bd и точка a лежит вне окружности, проходящей через точки b, c и d . Аналогично $\delta_1 \geq \alpha_1$, $\gamma_2 \geq \beta_2$, $\delta_2 \geq \beta_1$ и по очевидным причинам $\alpha_1 + \alpha_2 \geq \alpha_1$ и $\beta_1 + \beta_2 \geq \beta_1$. Отсюда следует, что флип не уменьшает наименьший угол в триангуляции. Так как с помощью флипов мы из любой триангуляции K можем получить триангуляцию Делоне множества S , то наименьший угол в K не больше чем наименьший угол в триангуляции Делоне S .

Лемма 1.6 (Лемма о максимальном наименьшем угле). *Среди всех триангуляций конечного множества $S \subset \mathbb{R}^2$ триангуляция Делоне максимизирует минимальный угол.*

Приведенное выше доказательство леммы о максимальном наименьшем угле можно изобразить с помощью *графа флипов*. Каждая триангуляция является вершиной этого графа и существует ориентированное ребро из μ в ν если вторую триангуляцию можно получить из первой с помощью одного флипа. Направление ребра соответствует нашему требованию, что флип должен заменять не локальное ребро Делоне на локальное ребро Делоне. Анализ времени работы алгоритма показывает, что в графе флипов нет ориентированных циклов и что его ненаправленная версия связна. Если мы позволяем проводить флипы в обоих направлениях, то любую триангуляцию S можно получить из любой другой не более чем за n^2 флипов.

1.3 Построение с элементами случайности

Алгоритм данного раздела строит триангуляцию Делоне последовательно, используя флипы и рандомизацию. После пояснения алгоритма мы представим подробный анализ ожидаемых ресурсов, которые он потребует.

Инкрементальный алгоритм

Мы можем получить более быстрый алгоритм для построения триангуляции Делоне, если мы будем чередовать реберные флипы с добавлением точек. Обозначим точки в множестве $S \subset \mathbb{R}^2$ через p_1, \dots, p_n и предположим, что они находятся в общем положении. Когда мы добавляем точку в триангуляцию, она может лежать вне или внутри выпуклой оболочки предыдущих точек. Для того, чтобы свести “внешний” случай к “внутреннему” мы начинаем с триангуляции D_0 , которая состоит из одного достаточно большого треугольника xyz . Пусть $S_i = \{x, y, z, p_1, \dots, p_i\}$ и D_i — триангуляция Делоне множества S_i . Алгоритм состоит из цикла `for`, в котором добавляются последовательные точки. После добавления точки, в нем используются реберные флипы, для того, чтобы получить условия Леммы Делоне перед добавлением следующей точки.

```
for  $i = 1$  to  $n$  do
  ищем  $\tau_{i-1}$  из  $D_{i-1}$ , содержащий  $p_i$ ;
  добавляем  $p_i$ , разделяя  $\tau_{i-1}$  на три;
  while  $\exists ab$  не локальное ребро Делоне do
    делаем флип  $ab$  в другую диагональ  $cd$ 
  endwhile
endfor
```

Две элементарные операции, использующиеся в этом алгоритме, показаны на рисунке 1.4 Оба рисунка могут рассматриваться как центральные проекции тетраэдра,

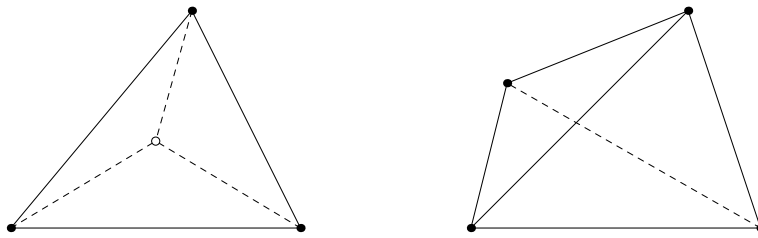


Рис. 1.4: На левом рисунке внутренняя точка разбиает треугольник на три новых. На правом рисунке прерывистая диагональ заменяет собой сплошную.

правда из разных точек. Поэтому добавление точки внутри треугольника иногда называется 1 – 3-флипом, а реберный флип также называется 2 – 2-флипом.

Растущая звезда

Отметим, что p_i является вершиной каждого нового треугольника в D_i . На самом деле, abc — треугольник в D_i если и только если $a, b, c \in S_i$ и описанная окружность

треугольника abc не содержит внутри себя точек S_i . Но если p_i не одна из его вершин, то $a, b, c \in S_{i-1}$ и если описанная окружность на содержит точек S_i , то она также не содержит и точек S_{i-1} . Следовательно abc треугольник из D_{i-1} . Это означает, что при добавлении точки p_i все флипы происходят при ее участии.

Нам понадобится несколько определений. *Звезда* точки p_i состоит из всех треугольников, содержащих p_i . *Линк* вершины p_i состоит из всех ребер ее звезды, не содержащих p_i . Сразу после того, как p_i добавлена ее линк состоит из трех ребер, соединяющих p_i с вершинами треугольника, который содержит p_i . Эти ребра отмечены и добавлены в стек, для того, чтобы инициировать начало цикла `while` из реберных флипов. Каждый флип заменяет ребро из линка на ребро с вершиной p_i . В то же время флип удаляет один из треугольников звезды и один из треугольников вне звезды и заменяет их на два треугольника, которые покрывают тот же самый четырехугольник звезды. В результате количество треугольников в звезде вершины p_i увеличивается на 1. Таким образом, количество флипов на три меньше чем количество ребер в окончательном линке, что также равно степени вершины p_i в D_i , уменьшенной на 3.

Количество флипов

Мы на некоторое время забудем про время, которое необходимо, чтобы найти треугольники τ_{i-1} . Оставшееся время пропорционально количеству флипов, которое нужно сделать при добавлении точек от p_1 до p_n . Предположим, что p_1, \dots, p_n — случайная входящая последовательность. В данном случае “случайная” не означает произвольная, а скорее то, что все перестановки из данных n точек равновероятны. Ожидаемое количество флипов это общее количество флипов, необходимое чтобы построить триангуляцию Делоне для каждой из $n!$ входящих перестановок, деленное на $n!$.

Рассмотрим последнюю добавленную точку — p_n . Сумма степеней всех возможных последних точек равна сумме степеней всех точек p_i в D_n . Последнее количество равно удвоенному количеству ребер, то есть

$$\sum_{i=1}^n \deg p_i \leq 6n.$$

Таким образом общее количество флипов, необходимых, чтобы добавить все последние точки, не превосходит $6n - 3n = 3n$. Каждая точка добавляется последней $(n - 1)!$ раз. Следовательно общее количество флипов удовлетворяет неравенству

$$F(n) \leq n \cdot F(n - 1) + 3n! \leq 3n \cdot n!.$$

Последнее неравенство несложно доказывается по индукции. Таким образом, ожидаемое количество флипов для n точек не превосходит $3n$.

Есть простой способ сказать то же самое. Ожидаемое количество флипов для последней точки не более трех, а значит ожидаемое количество флипов, необходимое для добавления произвольной точки, также не более трех.

История

Мы будем использовать эволюцию триангуляции Делоне для того, чтобы найти τ_{i-1} , в котором лежит p_i . Вместо треугольника, когда он разделяется на три или удаляется

флипом, мы скажем, что он порождает новые треугольники; это показано на следующем рисунке 1.5: слева показана операция, а справа отношение родитель-потомок для треугольников. Каждый раз когда мы разделяем треугольник или делаем флип

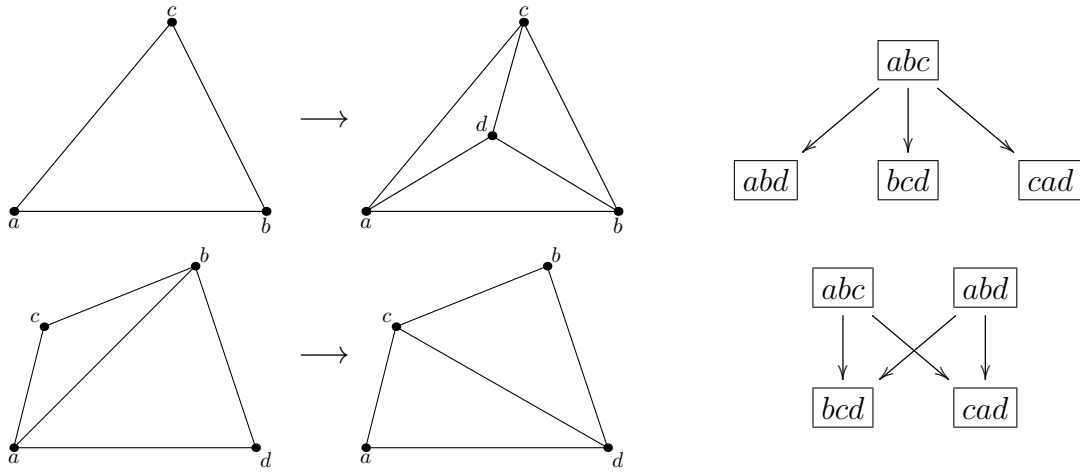


Рис. 1.5: Разделение треугольника создает родителя с тремя потомками. Флип ребра создает двух родителей с двумя общими потомками.

мы добавляем треугольники или узлы в растущий объем данных о истории построения. Эволюция от D_0 до D_n состоит из n разделений и не более $3n$ ожидаемых флипов. Итоговый направленный ориентированный граф (НАГ) содержит не более $1+3n+2 \cdot n = 9n+1$ ожидаемых вершин. В нем единственный источник — треугольник xyz , а стоками являются треугольники D_n .

Поиск и добавление

Рассмотрим момент когда мы добавляем точку p_i . Чтобы найти треугольник $\tau_{i-1} \in D_{i-1}$, который содержит p_i мы будем искать путь из треугольников в истории НАГ, каждый из которых содержит p_i . Этот путь начинается с xyz и заканчивается на τ_{i-1} . История НАГ триангуляции D_{i-1} состоит из i слоев. Слои с 0 по j соответствуют НАГ триангуляции D_j . Его стоками являются треугольники D_j и пусть $\sigma_j \in D_j$ содержит p_i . Треугольники с σ_0 по σ_j образуют последовательность не обязательно смежных вершин в пути поиска. Вполне возможно, что некоторые из треугольников σ совпадают. Пусть G_j — множество треугольников, удаленных из D_j в процессе добавления p_{j+1} , а H_j — множество треугольников, которые были бы удалены из D_j в случае независимого добавления p_i . Эти два множества схематически изображены на рисунке 1.6 в качестве интервалов на действительной прямой, изображающей триангуляцию Делоне. Если множества G_j и H_j не пересекаются, то $\sigma_j = \sigma_{j+1}$. Предположим, что $\sigma_j \neq \sigma_{j+1}$. Тогда $X_j = G_j \cap H_j \neq \emptyset$ и все треугольники на участке пути от σ_j до σ_{j+1} порождаются флипами, удаляющими треугольники из X_j . Следовательно стоимость поиска для p_i в крайнем случае пропорциональна сумме $\#X_j$ для j от 0 до $i-2$.

Запишем X_j в терминах других множеств. Эти множества показывают что произойдет если мы сначала добавим p_i в D_j , а затем p_{j+1} в триангуляцию Делоне множества $S_j \cup \{p_i\}$. Пусть Y_j — множество треугольников удаляемых при добавлении p_{j+1} и $Z_j \subseteq Y_j$ — множество треугольников, которые не принадлежат D_j . Каждый

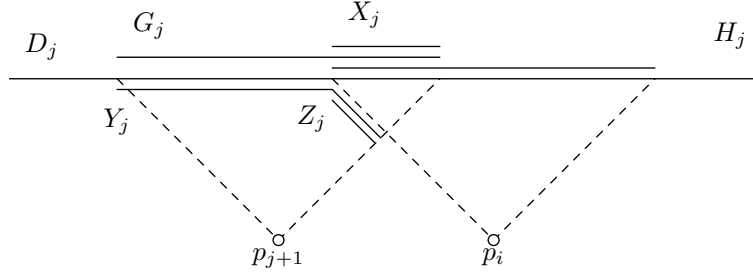


Рис. 1.6: Схематическое изображение множеств треугольников.

треугольник из Z_j появился при добавлении p_i , а значит p_i является одной из его вершин. Следовательно

$$X_j = G_j - (Y_j - Z_j).$$

Ожидание

Мы ограничим ожидаемое время поиска, получив ограничения на ожидаемый размер множества X_j . Будем использовать строчные буквы для обозначения мощностей множеств. В силу того, что $Z_j \subseteq Y_j$ и $Y_j - Z_j \subseteq G_j$ имеет место равенство

$$x_j = g_j - y_j + z_j.$$

Математические ожидания величин g_j и y_{j-1} равны, так как обе подсчитывают количество треугольников, удаляемых при добавлении случайной j -й точки. В силу того, что ожидание суммы равно сумме ожиданий

$$E \left[\sum_{j=0}^{i-2} x_j \right] = \sum_{j=0}^{i-2} E[g_j] - E[y_j] + E[z_j] = E[g_0 - g_{i-1}] + \sum_{j=0}^{i-2} E[z_j].$$

Для того, чтобы найти матожидание z_j мы используем тот факт, что среди $j+2$ точек любая пара точек с одной и той же вероятностью может быть парой p_{j+1} и p_i . Например, если p_{j+1} и p_i не соединены ребром в триангуляции Делоне множества $S_j \cup \{p_{j+1}, p_i\}$, то $Z_j = \emptyset$. В общем случае треугольник из триангуляции Делоне множества $S_j \cup \{p_i\}$ лежит в звезде p_i с вероятностью не больше $\frac{3}{j+1}$. Матожидание количества удаленных треугольников при добавлении p_{j+1} не более четырех. Так как матожидание произведения равно произведению матожиданий, то $E[z_j] \leq \frac{4 \cdot 3}{j+1}$.

Ожидаемая длина пути поиска для p_i есть

$$\sum_{j=0}^{i-2} E[x_j] \leq \sum_{j=0}^{i-2} \frac{12}{j+1} \leq 1 + 12 \ln(i-1).$$

Следовательно матожидание общего времени, необходимого на поиск в истории НАГ есть $\sum_i \sum_j E[x_j] \leq c \cdot n \log n$.

Подведем итоги, рандомизированный инкрементальный алгоритм строит триангуляцию Делоне множества из n точек в \mathbb{R}^2 за ожидаемое время $O(n \log n)$ и с ожидаемым количеством используемой памяти $O(n)$.

1.4 Символьное возмущение

Вычислительный метод символьного возмущения геометрических исходных данных подтверждает математическую “стандартность” предположения о том, что точки находятся в общем положении. В данном разделе описывается конкретное возмущение, которое называется SoS — Симуляция симплицальности (Simulation of Simplicity).

Тест на ориентацию

Пусть $a = (\alpha_1, \alpha_2)$, $b = (\beta_1, \beta_2)$ и $c = (\gamma_1, \gamma_2)$ — три точки на плоскости. Мы считаем тройку a, b, c вырожденной, если они лежат на одной прямой. Это включает и тот случай когда две точки совпадают. В вырожденном случае точка c является аффинной комбинацией точек a и b , то есть $c = \lambda_1 a + \lambda_2 b$ где $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Такие коэффициенты существуют если и только если определитель матрицы

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 \\ 1 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

обращается в нуль. В невырожденном случае последовательность точек a, b, c задает левый или правый поворот. Мы снова можем использовать определитель Δ для того, чтобы определить какой из них.

Лемма 1.7 (Лемма об ориентации). *Последовательность a, b, c задает левый поворот если и только если $\det \Delta > 0$ и правый поворот если и только если $\det \Delta < 0$.*

Доказательство. Вначале мы проверим это утверждение для точек $a_0 = (0, 0)$, $b_0 = (1, 0)$ и $c_0 = (0, 1)$. Очевидно, что они задают левый поворот и

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Мы можем непрерывно сдвинуть точки a_0, b_0, c_0 в любую тройку точек a, b, c , задающую левый поворот, без попадания точек на одну прямую. В силу того, что определитель меняется непрерывно при непрерывном изменении координат, он остается положительным во время всего движения, а значит будет положительным и для точек a, b, c . Из симметрии следует, что все правые тройки точек дают отрицательный определитель. \square

Тест на нахождение внутри окружности

Тест на нахождение внутри окружности формулируется для четырех точек a, b, c, d на плоскости. Мы называем четверку точек вырожденной если либо a, b, c лежат на одной прямой, либо a, b, c, d лежат на одной окружности. Мы уже знаем как проверить, что точки лежат на одной прямой. Для того, чтобы проверить, что точки находятся на одной окружности напомним определение поднятых точек, $\hat{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, где $\alpha_3 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$ и так далее. Точки a, b, c, d лежат на одной окружности если и только если, точки $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$ лежат в одной плоскости. Или, другими словами \hat{d} — аффинная

комбинация точек $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$, что эквивалентно равенству нулю определителя матрицы

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 1 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ 1 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{pmatrix}.$$

В невырожденном случае d лежит вне или внутри описанной окружности треугольника abc . Мы можем использовать определители Δ и Γ для того, чтобы определить где именно. Отметим, что перестановка точек a, b, c может поменять знак $\det \Gamma$ без изменения геометрии конфигурации. Так как знаки $\det \Gamma$ и $\det \Delta$ меняются одновременно, то мы можем перемножить эти определители, чтобы этого избежать.

Лемма 1.8 (Лемма о нахождении внутри окружности). *Точка d лежит внутри окружности, задаваемой точками a, b, c если и только $\det \Delta \cdot \det \Gamma < 0$ и вне окружности если $\det \Delta \cdot \det \Gamma > 0$.*

Доказательство. Вначале проверим утверждение для точек $d_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и $a_0 = (0, 0), b_0 = (1, 0)$ и $c_0 = (0, 1)$ как и ранее. Точка d_0 центр этой окружности, а значит лежит внутри нее. Определитель Δ равен 1, а для Γ

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2},$$

то есть их произведение отрицательно. Как и в доказательстве леммы об ориентации, мы выводим общий результат из частного с помощью непрерывности. Любая конфигурация точек, где d лежит внутри окружности, задаваемой a, b, c , может быть получена из a_0, b_0, c_0, d_0 с помощью непрерывного движения, избегая вырожденности. Во время движения знаки определителей не меняются, а значит не меняется и знак произведения. Для отрицательного произведения утверждение доказано, для положительного оно аналогично. \square

Алгебраическая основа

Теперь посмотрим на геометрическую вырожденность с более абстрактной и алгебраической точки зрения. Для большей наглядности мы ограничимся тестом на ориентацию на плоскости. Пусть S — множество из n точек, обозначенных $p_i = (\varphi_{i,1}, \varphi_{i,2})$ при $1 \leq i \leq n$. Записав все $2n$ координат в одну последовательность, мы будем думать об S как об одной точке $Z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$, где $\zeta_{2i-1} = \varphi_{i,1}$ и $\zeta_{2i} = \varphi_{i,2}$. Точка Z является вырожденной если и только если

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \zeta_{2i-1} & \zeta_{2i} \\ 1 & \zeta_{2j-1} & \zeta_{2j} \\ 1 & \zeta_{2k-1} & \zeta_{2k} \end{pmatrix} = 0$$

для некоторых $1 \leq i < j < k \leq n$. Данное уравнение задает дифференцируемое $(2n - 1)$ -мерное многообразие в \mathbb{R}^{2n} . Всего есть $\binom{n}{3}$ таких многообразий \mathbb{M}_ℓ и Z вырождена если и только если $Z \in \bigcup_\ell \mathbb{M}_\ell$. Каждое многообразие имеет размерность на

1 меньше чем объемлющее пространство, а значит меру нуль в \mathbb{R}^{2n} . У нас есть объединение конечного количества множеств меры нуль, которое тоже имеет меру нуль. Другими словами, почти все точки в открытой окрестности точки $Z \in \mathbb{R}^{2n}$ задают невырожденные конфигурации. Точка близкая к Z часто называется возмущением Z или S . Из результата об окрестностях следует, что существуют сколь угодно близкие невырожденные возмущения S .

Возмущение

Мы построим невырожденное возмущение S , используя набор положительных параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2n}$. Эти параметры будут выбраны произвольными, но сколь угодно малыми, также мы можем считать их бесконечно малыми. Также они будут выбраны существенно различными, позже мы поймем, что это означает. Пусть $Z \in \mathbb{R}^{2n}$, для каждого $\varepsilon > 0$ определим

$$Z(\varepsilon) = (\zeta_1 + \varepsilon_1, \dots, \zeta_{2n} + \varepsilon_{2n}),$$

где $\varepsilon_i = f_i(\varepsilon)$ с непрерывной функцией $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $f(0) = 0$. Если ε_i существенно отличаются, то у нас есть следующие три свойства при условии, что $\varepsilon > 0$ достаточно малое.

- (i). $Z(\varepsilon)$ — невырождена;
- (ii). $Z(\varepsilon)$ сохраняет все невырожденные свойства Z .
- (iii). Вычислительная добавка для реализации $Z(\varepsilon)$ мала.

Например, если $\varepsilon_i = \varepsilon^{2^i}$, то $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2 \gg \dots \gg \varepsilon_{2n}$, то мы можем проделать все вычисления просто сравнивая коэффициенты без нахождения допустимого ε . Мы продемонстрируем это, точно вычислив ориентацию точек p_i, p_j, p_k после возмущения. По определению ориентация совпадает со знаком определителя матрицы

$$\Delta(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \zeta_{2i-1} + \varepsilon_{2i-1} & \zeta_{2i} + \varepsilon_{2i} \\ 1 & \zeta_{2j-1} + \varepsilon_{2j-1} & \zeta_{2j} + \varepsilon_{2j} \\ 1 & \zeta_{2k-1} + \varepsilon_{2k-1} & \zeta_{2k} + \varepsilon_{2k} \end{pmatrix}.$$

Определитель $\Delta(\varepsilon)$ является многочленом от ε , а значит члены с меньшими степенями более существенны чем с большими. Предположим, что $i < j < k$ и перечислим члены $\Delta(\varepsilon)$ в порядке возрастания степеней:

$$\begin{aligned} \det \Delta(\varepsilon) &= \det \Delta - \det \Delta_1 \cdot \varepsilon^{2^{2i-1}} \\ &\quad + \det \Delta_2 \cdot \varepsilon^{2^{2i}} + \det \Delta_3 \cdot \varepsilon^{2^{2j-1}} \\ &\quad - 1 \cdot \varepsilon^{2^{2j-1}} \varepsilon^{2^{2i}} \pm \dots, \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & \zeta_{2i-1} & \zeta_{2i} \\ 1 & \zeta_{2j-1} & \zeta_{2j} \\ 1 & \zeta_{2k-1} & \zeta_{2k} \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & \zeta_{2j} \\ 1 & \zeta_{2k} \end{pmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & \zeta_{2j-1} \\ 1 & \zeta_{2k-1} \end{pmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 1 & \zeta_{2i} \\ 1 & \zeta_{2k} \end{pmatrix}.$$

Первое свойство выполняется, так как пятое слагаемое ненулевое и его вклад не может быть скомпенсирован последующими членами. Свойство два выполняется, так как знак возмущенного определителя такой же как у невозмущенного за исключением случая, когда последний равен нулю.

Реализация

Для того, чтобы показать третье свойство мы приведем реализацию проверки для конфигурации $Z(\varepsilon)$. Вначале мы сортируем индексы так, что $i < j < k$ и подсчитаем количество необходимых для этого транспозиций. Затем определим какой поворот задает возмущенная тройка точек левый или правый, это мы сделаем, подсчитав определители четырех подматриц, перечисленных выше.

```
boolean LEFTTURN (integer i, j, k)
    упорядочиваем  $i < j < k$ ;
    case  $\det \Delta \neq 0$ : return  $\det \Delta > 0$ ;
    case  $\det \Delta_1 \neq 0$ : return  $\det \Delta_1 < 0$ ;
    case  $\det \Delta_2 \neq 0$ : return  $\det \Delta_2 > 0$ ;
    case  $\det \Delta_3 \neq 0$ : return  $\det \Delta_3 > 0$ ;
    otherwise: return FALSE.
```

Если для сортировки i, j, k нам необходимо нечетное количество транспозиций, то сортировка изменяет знак и мы это можем исправить изменив результат функции LEFTTURN на противоположный.

В качестве важной детали отметим, что знаки определителей должны быть вычислены точно. Используя обычную арифметику чисел с плавающей точкой, это вообще говоря невозможно. Следовательно необходимо прибегнуть к точным арифметическим вычислениям, использующим например расширенные целые числа или другие представления координат. Эти методы обычно более затратны чем арифметика с плавающей точкой, но разница существенно зависит от различного оборудования. Прагматичный подход заключается в использовании арифметики чисел с плавающей точкой вместе с анализом возможных ошибок. После вычисления определителя, используя арифметику с плавающей точкой, мы проверяем, является ли его абсолютная величина достаточно большой, чтобы гарантировать знак определителя. Только в том случае когда это не может быть достигнуто мы повторяем вычисления используя точную арифметику.

Задачи

1. **Пересечение триангуляции** (два балла). Пусть K — триангуляция множества из n точек на плоскости. Пусть ℓ — прямая, которая не проходит ни через одну из этих точек. Докажите, что ℓ пересекает не более $2n - 4$ ребер триангуляции K и что эта оценка является точной при $n \geq 3$.
2. **Минимальное связывающее дерево** (один балл). Понятие минимального связывающего дерева может быть обобщено с понятия взвешенных графов на геометрическую реализацию, где вершинами являются точки на плоскости. Возьмем полный граф на множестве вершин и для каждого ребра определим его длину как евклидово расстояние между его концами. Минимальное связывающее дерево такого графа называется *евклидовым минимальным связывающим деревом* для данного множества точек. Докажите, что все ребра евклидова минимального связывающего дерева принадлежат триангуляции Делоне данного множества.
3. **Вектор из упорядоченных углов** (один балл). Пусть K — триангуляция конечного множества на плоскости. Пусть t — количество треугольников в триангуляции, рассмотрим вектор из упорядоченных углов

$$\mathbf{v}(K) = (\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{3t}).$$

Докажите, что либо $\mathbf{v}(K) = \mathbf{v}(D)$, либо $\mathbf{v}(K)$ лексикографически меньше чем $\mathbf{v}(D)$, где D — триангуляция Делоне исходного множества.

4. **Минимакс описанной окружности** (два балла). Пусть K триангуляция конечного множества на плоскости и $\rho(K)$ — наибольший из радиусов описанных окружностей треугольников их K . Докажите, что $\rho(K) \geq \rho(D)$, где D — триангуляция Делоне того же множества.
5. **Случайная перестановка** (один балл). Докажите, что следующий алгоритм строит случайную перестановку чисел от 1 до n :

```
for  $i = 1$  to  $n$  do
   $Z[i] = i$ ;
  выбираем случайный индекс  $1 \leq j \leq i$ ;
  меняем местами  $Z[i]$  и  $Z[j]$ ;
endfor.
```

6. **Диаграмма Вороного из наиболее удаленных точек** (один балл). Пусть $S \in \mathbb{R}^2$ — конечное множество. *Регион Вороного из наиболее удаленных точек* для точки $p \in S$ состоит из всех точек, для которых точка p наиболее удалена среди всех точек из S , то есть

$$F_p = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - p\| \geq \|x - q\|, \forall q \in S\}.$$

- (i) Докажите, что $F_p \neq \emptyset$ если и только если p вершина выпуклой оболочки S .
- (ii) Нарисуйте регионы Вороного из наиболее удаленных точек для множества из около десяти точек, также нарисуйте дуальную триангуляцию Делоне для наиболее удаленных точек.

7. **Пересечение отрезков** (два балла). Пусть a, b, x, y точки на плоскости \mathbb{R}^2 . Они находятся в общем положении если никакие три не лежат на одной прямой.

- (i) Предположим, что эти точки находятся в общем положении. Напишите булеву функцию, которая определяет пересекаются или нет отрезки ab и xy .
- (ii) Какие бывают вырожденные случаи и что делает Ваша функция в этих случаях?

8. **Перечисление вырожденностей** (один балл). Пусть a, b, c, d точки в пространстве \mathbb{R}^3 . *Ориентацией* последовательности назовем знак определителя

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 1 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ 1 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{pmatrix}.$$

Симуляция симплицальности превращает этот определитель в многочлен $P(\varepsilon)$, а ориентация определяется нахождением значения этого многочлена для достаточно малых $\varepsilon > 0$.

- (i) Выпишите члены этого многочлена в порядке уменьшения их значимости.
- (ii) Возмущение классифицирует и разделяет различные вырожденные случаи, которые могут возникнуть. Каждый класс соответствует нескольким нулевым слагаемым в начале многочлена. Опишите каждый класс с помощью конфигураций точек (рисунков).

Глава 2

Треугольные сетки

В трех разделах данной главы знания, полученные нами в первой главе, применяются для построения треугольных сеток на плоскости. При генерации сеток вершины больше не являются частью исходных данных и должны быть добавлены с помощью самого алгоритма построения. Обычная постановка задачи построения сетки состоит в том, чтобы данную область разбить на клетки или элементы. В данной главе мы концентрируемся на построении сеток, чьими элементами являются треугольники, и уделяем внимание таким критериям качества как размеры углов и отношение отрезков. В разделе 2.1 показывается как адаптировать триангуляцию Делоне к ограничениям, заданным в виде некоторых отрезков, которые должны быть частью сетки. В разделах 2.2 и 2.3 описывается и анализируется метод улучшения Делоне, который добавляет новые вершины в центрах описанных окружностей треугольников, уже существующих в триангуляции Делоне.

2.1 Несвободные триангуляции

В этом разделе изучаются триангуляции, с ограничениями в виде ребер, которые являются частью исходных данных. Мы покажем, что существует единственная несвободная триангуляция, которая является в некотором смысле ближайшей к (свободной) триангуляции Делоне.

Ограничивающие отрезки

В предыдущих разделах мы построили триангуляцию Делоне для данного множества точек. Теперь входящие данные состоят из конечного множества точек $S \in \mathbb{R}^2$ и набора отрезков L , каждый из которых соединяет пару точек из S . Мы дополнительно потребуем, чтобы любые два отрезка либо не пересекались, либо имели общую вершину. *Несвободной триангуляцией* множеств S и L называется такая триангуляция S , которая содержит все ребра из L . Например, мы можем построить такую триангуляцию, добавляя ребра, соединяющие точки из S так, чтобы они не пересекали ранее нарисованные ребра.

Алгоритм “заметания” плоскости

Идея организации алгоритма, основанного на прямой, заметающей плоскость, приводит нас к эффективному построению несвободной триангуляции. Мы используем

вертикальную прямую, которая заметает плоскость слева направо. В алгоритме используются две структуры данных. *Расписание* X , которое упорядочивает события во времени. И *множество пересечений* Y , которое хранит множество отрезков, пересекающих нашу прямую. Алгоритм определяется следующим инвариантом.

Инвариант (I): В любой момент времени частичная триангуляция содержит все ребра из L , максимальное количество ребер слева от прямой и не содержит других ребер. Из данного инварианта (I) следует, что между левыми концами двух ограничивающих отрезков, соседних вдоль заметающей прямой, мы получим выпуклую цепочку ребер частичной триангуляции. Для того, чтобы быть уверенными в том, что новые ребра могут быть добавлены за постоянное время, алгоритм запоминает самую правую точку в каждой цепочке. Если точка p встречается следующей на пути двигающейся прямой и попадает внутрь одного из интервалов, на которые разбита прямая, то алгоритм соединяет p с соответствующей самой правой точкой. Далее он продолжает идти по и против часовой стрелки вдоль цепи. Каждый шаг либо добавляет новое ребро, либо заканчивает путь. Если p — правый конец одного из отрезков, то она разделяет два интервала на прямой и алгоритм проделывает подобные пути дважды, по одному разу для каждого интервала.

Расписание составляется с помощью сортировки точек множества S слева направо, что может быть сделано за время $O(n \log n)$, где n — количество точек в S . Множество пересечений является некоторым словарем, в котором возможен поиск, добавление и удаление каждая операция за время $O(\log n)$. Для каждой точки мы будем вызывать поиск и для каждого отрезка из L будем вызывать пару операций добавления и удаления, что в сумме займет время $O(n \log n)$. Менее чем $3n$ ребер будет добавлено в триангуляцию, каждое за постоянное время. Следовательно алгоритм заметания плоскости строит несвободную триангуляцию множеств S и L за время $O(n \log n)$.

Несвободные триангуляции Делоне

Триангуляции, построенные с помощью алгоритма заметания плоскости, обычно содержат много маленьких и больших углов. Мы используем понятие видимости точек для того, чтобы получить несвободные триангуляции, которые не содержат малых углов насколько это возможно.

Точки $x, y \in \mathbb{R}^2$ называются *видимыми* если отрезок xy не содержит внутри себя точек из S и не пересекается по внутренним точкам с отрезками ограничивающего множества L . Или, эквивалентно, $\text{int } xy \cap S = \emptyset$ и $\text{int } xy \cap uv = \emptyset$ для всех $uv \in L$. Предположим, что точки находятся в общем положении. Будем говорить, что ребро ab , где $a, b \in S$, принадлежит *несвободной триангуляции Делоне* множеств S и L , если

- (i). $ab \in L$ или
- (ii). a и b видимы друг из друга и существует такая окружность, проходящая через a и b , что любая точка (множества S) внутри этой окружности невидима из любой точки $x \in \text{int } ab$.

Будем говорить, что окружность из пункта (ii) *свидетельствует* принадлежность отрезка ab несвободной триангуляции Делоне. Отметим, что если $L = \emptyset$, то несвободная триангуляция Делоне множеств S и L совпадает с обычной триангуляцией

Делоне S . В общем случае, однако, не очевидно, что мы задали действительно триангуляцию. К примеру, непонятно почему ребра, удовлетворяющие свойствам (i) и (ii) не пересекаются.

Реберные флипы

Мы введем обобщенное понятие локального ребра Делоне и будем использовать его для доказательства того, что предыдущее определение несет некоторый смысл. Пусть K — произвольная несвободная триангуляция Делоне множеств S и L . Ребро $ab \in K$ называется *локальным ребром Делоне* если $ab \in L$, или ab — сторона выпуклой оболочки, или d лежит вне описанной окружности треугольника abc , где $abc, abd \in K$.

Лемма 2.1 (Несвободная лемма Делоне). *Если любое ребро K является локальным ребром Делоне, то K есть несвободная триангуляция Делоне множеств L и L .*

Доказательство. Мы покажем, что любое ребро K удовлетворяет свойствам (i) и (ii), а значит принадлежит несвободной триангуляции Делоне. Отсюда следует утверждение леммы, так как любое дополнительное ребро пересекает хотя бы одно ребро из K , то есть несвободной триангуляции Делоне.

Пусть ab некоторое ребро, а p — вершина триангуляции K . Допустим $ab \notin L$, в противном случае оно очевидно принадлежит несвободной триангуляции Делоне. Предположим также, что ab не является ребром выпуклой оболочки, так как в этом случае легко найти окружность, проходящую через a и b и не содержащую точку p . Следовательно ab принадлежит двум треугольникам триангуляции, пусть abc тот из них, который отделяется прямой ab от точки p . Нам необходимо доказать, что если p видима из некоторой точки $x \in \text{int } ab$, то p находится вне описанной окружности треугольника abc . Рассмотрим последовательность ребер K , которые пересекают отрезок xp . В силу того, что x и p видимо, то эти ребра не принадлежат L , а значит мы можем применить ту же аргументацию, что и в доказательстве обычной леммы Делоне 1.4. \square

Данный результат позволяет нам использовать алгоритм реберных флипов для построения несвободной триангуляции Делоне. Единственная разница с изначальным алгоритмом реберных флипов состоит в том, что мы не можем делать флипы с ребрами из L , так как они уже локальные ребра Делоне по определению. Как и ранее алгоритм завершит работу за время $O(n^2)$ после менее чем $\binom{n}{2}$ флипов. Анализ изменяющихся углов, аналогичный Разделу 1.2, приводит к тому, что Лемма о максимальном наименьшем угле 1.6 верна и в случае несвободной триангуляции.

Лемма 2.2 (Несвободная лемма о максимальном наименьшем угле). *Среди всех несвободных триангуляций множеств S и L несвободная триангуляция Делоне максимизирует наименьший угол.*

Расширенные диаграммы Вороного

Как и для обычных триангуляций Делоне, у каждой несвободной триангуляции Делоне есть дуальная триангуляция Вороного, но на поверхности, которая устроена сложнее чем обычная евклидова плоскость. Представьте \mathbb{R}^2 как лист бумаги Σ_0 с нарисованными на нем точками из S и отрезками из L . Для каждого отрезка $\ell_i \in L$ мы разрежем Σ_0 вдоль ℓ_i и склеим с другим листом Σ_i , также разрезанным вдоль

ℓ_i . Склеивание вдоль ℓ_i прodelывается таким образом, что любой путешественник, пересекающий ℓ_i , переходит с листа Σ_0 на Σ_i и наоборот. Самопересечение в каждом конкретном склеивании необходимо, чтобы добиться эффекта, показанного на следующем рисунке 2.1. Это невозможно сделать без самопересечений в \mathbb{R}^3 , однако уже в

Рис. 2.1: Рисунок склеивания.

\mathbb{R}^4 это осуществимо. Будем называть Σ_0 — *основным листом*, а после приклеивания у нас добавится $m = |L|$ *вторичных листов* $\Sigma_i, 1 \leq i \leq m$. Каждый вторичный лист приклеен к Σ_0 , но не соединен с остальными вторичными листами. Теперь у нас есть по $m + 1$ копии для каждой точки $x \in \mathbb{R}^2$, по одной копии x_i на каждом листе Σ_i .

Мы уже знаем, что означает понятие видимости для двух точек на начальном листе. Для других точек нам необходимо более общее определение. Для $i \neq 0$ точки x_0 и y_i называются *видимыми*, если x_0y_0 пересекает отрезок ℓ_i и ℓ_i первый ограничивающий отрезок, который пересекает отрезок x_0y_0 при движении от точки x_0 . *Расстояние* между точками x_0 и y_i тогда определяется следующим образом:

$$d(x_0, y_i) = \begin{cases} \|x_0 - y_i\|, & \text{если } x_0 \text{ и } y_i \text{ видимы,} \\ \infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Новую функцию расстояния мы будем использовать для определения *расширенной диаграммы Вороного*, которая изображена на следующем рисунке 2.2. Центр окруж-

Рис. 2.2: Рисунок расширенной диаграммы Вороного.

ность, которая свидетельствует наличие ребра ab в несвободной триангуляции Делоне, находится на основном или вторичном листе. В любом случае этот центр ближе к a и b чем к любой другой точке S . Отсюда следует, что области Вороного a и b делят общий непустой отрезок границы. С другой стороны, каждая точка на ребре расширенной диаграммы Вороного является центром окружности, свидетельствующей, что соответствующее ребро принадлежит несвободной триангуляции Делоне.

2.2 Улучшение Делоне

В данном разделе показывается как использовать триангуляции Делоне для построения треугольных сеток на плоскости. Идея состоит в том, чтобы добавлять точки до тех пор пока триангуляция не станет подходящей нам сеткой. Ограничивающие ребра будут являться частью триангуляции Делоне, хотя и принудительное включение этих ребер, как мы поступили в разделе 2.1, возможно.

Задача построения сетки

Главная задача при построении сетки состоит в разбиении геометрического пространства на некоторые элементы. Элементы ограничены в размерах и типах, кроме того

количество элементов не должно быть слишком большим. Мы обсудим конкретный случай задачи построения двумерной сетки. **Вход.** Это многоугольная область на плоскости, возможно с дырками, ограничивающими и отрезками и вершинами внутри.

Выход. Триангуляция данной области, содержащая все вершины и ребра входа. Граф, состоящий из входных вершин и ребер, будем обозначать G , а итоговую триангуляцию — K . Будет удобно заключить G в ограничивающий прямоугольник и триангулировать всю его внутренность. Триангуляция исходной области обычно получается взятием подмножества треугольников конечной триангуляции.

Качество треугольников

Качество треугольника abc мы будем измерять по его наименьшему углу θ . Двумя альтернативными вариантами являются наибольший угол и отношение его “длины” и “ширины”. Мы утверждаем, что хорошая оценка снизу на наименьший угол также дает хорошие оценки и на две других величины. Наибольший угол в этом случае не превосходит $\pi - 2\theta$, то есть если наименьшие углы отделены от нуля, то наибольшие углы отделены от π . Отношение “длины” и “ширины” для треугольника это отношение его наибольшей стороны, предположим, что это сторона ac , к расстоянию от точки b до ac . Предположим, что наименьший угол это угол a . Тогда $\|b - x\| = \|b - a\| \sin \theta$, где x — проекция b на ac . Сторона ab не меньше стороны ac , а значит $\|b - a\| \geq \|c - a\|/2$. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\sin \theta} \leq \frac{\|c - a\|}{\|b - x\|} \leq \frac{2}{\sin \theta}.$$

Другими словами, отношение длины и ширины линейно зависит от величины, обратной к минимальному углу. Если θ отделено от нуля, то это отношение ограничено сверху и наоборот.

Нашей целью будет построить такую триангуляцию K , в которой наименьший угол не меньше некоторой константы, а количество треугольников в K не больше некоторой константы, умноженной на минимум. Но, те малые углы, которые получаются из исходных ограничивающих ребер, в дальнейшем не могут быть увеличены. Разумный путь разрешить эту проблему состоит в том чтобы принять жесткие входные ограничения как неизбежные и изолировать их так, чтобы они не ухудшали близкие треугольники. В данном разделе мы предполагаем, что входные данные не содержат таких жестких ограничений, в частности мы считаем, что все входящие углы не меньше $\pi/2$.

Улучшение Делоне

Мы будем строить K как триангуляцию Делоне множества точек, которое включает исходное. Другие точки добавляются по одной для того, чтобы разрешить ситуацию с входными ребрами, которые не являются ребрами триангуляции Делоне, и треугольниками с малыми углами.

- (1). Пусть ab — отрезок ребра в графе G , который к настоящему времени не покрыт ребром триангуляции Делоне. Это может произойти только в том случае, когда некоторые вершины лежат внутри окружности с диаметром ab . В этом случае

мы будем говорить, что эти вершины *захвачены* отрезком ab и будем использовать функцию SPLIT_1 для того, чтобы добавить точку в середине отрезка ab и исправить триангуляцию с помощью нескольких реберных флипов.

- (2). Предположим, что треугольник abc в текущей триангуляции Делоне является вытянутым, то есть его наименьший угол меньше требуемой нижней границы. Мы используем функцию SPLIT_2 для того, чтобы добавить новую точку x в центре описанной окружности треугольника abc . В силу того, что его описанная окружность более не является пустой, треугольник abc будет удален с помощью одного из флипов, необходимых чтобы восстановить триангуляцию Делоне.

Алгоритм

Первой задачей алгоритма является необходимость покрыть все входящие ребра, а второй — избавиться от вытянутых треугольников. Перед началом алгоритма мы помещаем G в прямоугольник B . В дальнейшем мы будем добавлять новые точки внутри этого прямоугольника для того, чтобы избежать постоянного роста области, в которой мы строим сетку. Более конкретно, мы возьмем B в три раза большим чем наименьший прямоугольник, содержащий G . Прямоугольник B разбивается на 9 одинаковых, каждый из которых содержит G , мы поместим G в центральный из них. При этом каждая сторона B разбита на три равных отрезка. В начальный момент K есть триангуляция Делоне входящих вершин, к которым добавлены 12 точек на границе B .

```

loop
  while  $\exists$  захватывающий отрезок  $ab$  do  $\text{SPLIT}_1(ab)$  endwhile;
  if не осталось вытянутых треугольников then exit end if;
  пусть  $abc$  вытянутый и  $x$  — центр его описанной окружности;
   $x$  захвачена отрезками  $s_1, \dots, s_k$ ;
  if  $k \geq 1$  then  $\text{SPLIT}_1(s_i)$  для всех  $i$  else  $\text{SPLIT}_2(abc)$  endif
forever.

```

Из выбора B следует, что ни один центр описанной окружности x никогда не попадет наружу B . Это верно так как у начальных 12 (или меньше) треугольников нетупые углы напротив сторон, лежащих на границе B . В силу того, что описанные окружности треугольников Делоне пустые, мы получаем, что все центры лежат внутри B . Данный алгоритм сохраняет свойство, что углы напротив граничных ребер не тупые, а значит центры описанных окружностей лежат внутри B .

Предварительный анализ

Поведение алгоритма определяется точками, которые он добавляет в нашу сетку. Мы уже знаем, что все точки находятся внутри или на границе прямоугольника B , площадь которого конечна. Если мы докажем, что расстояние между любыми двумя точками не менее положительного числа 2ε , то отсюда будет следовать, что алгоритм заканчивает после добавления конечного количества точек. Точнее, если w обозначает ширину, а h — высоту B , то площадь прямоугольника, каждая сторона которого сдвинута на ε равна $A = (w + 2\varepsilon)(h + 2\varepsilon)$. Количество точек внутри этого прямоугольника не превосходит $n \leq \frac{A}{\pi\varepsilon^2}$, так как круги радиуса ε с центрами в точках сетки не

имеют общих внутренних точек и содержатся внутри увеличенного прямоугольника. Данная аргументация является стандартной в задачах построения сеток и имеет отношение к теории упаковок. Существование такого положительного ε будет доказано в разделе 2.3. Анализ, приведенный в указанном разделе, улучшит оценки на площадь с помощью выбора размеров кругов в зависимости от их положения в сетке.

Что касается время выполнения, то наиболее затратная часть алгоритма, это реберные флипы, которые используются для восстановления триангуляции Делоне. Линейное математическое ожидание, которое мы получили в разделе 1.3, в данном случае не применимо, так как точки добавляются в неслучайном порядке. Общее количество флипов в этом случае не больше $\binom{n}{2}$. Отсюда следует верхняя граница в $O(n^2)$ на время выполнения, в то время как стоимость добавления новой вершины равна $O(n)$.

2.3 Анализ алгоритма

В данном разделе проводится анализ алгоритма из раздела 2.2. Доказывается верхняя оценка на количество треугольников, построенных с помощью этого алгоритма, и асимптотическая нижняя оценка на количество треугольников, которые должны быть построены.

Локальный радиус точки

Мы будем пытаться понять алгоритм улучшения Делоне с точки зрения его действия на *локальный радиус точки*, который определяется как отображение $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Для данной точки $x \in \mathbb{R}^2$ функция $f(x)$ есть такой наименьший радиус r , что замкнутый круг радиуса r с центром в x

- (i). Содержит две вершины из G , или
- (ii). Пересекает одно из ребер G и содержит одну из вершин G , которая не является концом этого ребра, или
- (iii). пересекает два ребра G без общих вершин.

Все три случая показаны на следующем рисунке 2.3.

Рис. 2.3: Локальный радиус точки

В силу свойства (i) неравенство $f(a) \leq \|a-b\|$ выполнено для всех различных вершин a и b множества G . Локальный радиус точки удовлетворяет одностороннему условию Липшица, откуда следует его непрерывность.

Лемма 2.3 (Условие Липшица).

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|.$$

Доказательство. Чтобы получить противоречие, допустим, что у нас нашлись такие точки x и y , что $f(x) < f(y) - \|x-y\|$. Круг радиуса $f(x)$ с центром в x содержится во внутренности круга радиусом $f(y)$ с центром в y , а значит мы можем уменьшить круг с центром в y с сохранением того свойства, что он будет пересекать две различные вершины или отрезка из G . Это противоречит определению $f(y)$. \square

Константы

В анализе алгоритма используют две аккуратно выбранные константы C_1 и C_2 , которые удовлетворяют неравенствам

$$1 + \sqrt{2}C_2 \leq C_1 \leq \frac{C_2 - 1}{2 \sin \alpha},$$

где α — нижняя граница для углов треугольников, которой мы хотим добиться с помощью алгоритма улучшения Делоне. Множества, которые определяются двумя неравенствами, ограничены прямыми и у нас есть решение в том и только том случае когда наклон первой прямой больше наклона второй прямой, то есть $\frac{1}{\sqrt{2}} > 2 \sin \alpha$. Следующий рисунок 2.4

Рис. 2.4: Прямые для ограничения констант

показывает эти ограничения при $\alpha < \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} = 20,7\dots^\circ$. Прямые пересекаются в точке, находящейся в четверти плоскости с положительными координатами и координаты точки пересечения являются наименьшими возможными константами C_1 и C_2 , которые удовлетворяют указанным ограничениям.

Инварианты

Алгоритм начинает работу с вершинами множества G и последовательно добавляет остальные вершины. Мы покажем, что при добавлении новой вершины, расстояние от нее до уже существующих не может быть сильно меньше чем локальный радиус.

Лемма 2.4 (Об инвариантах). *Пусть p и x две такие точки, что x была добавлена после p . Тогда если x была добавлена с помощью*

$$(A). \text{ SPLIT}_1, \text{ то } \|x - p\| \geq \frac{f(x)}{C_1};$$

$$(B). \text{ SPLIT}_2, \text{ то } \|x - p\| \geq \frac{f(x)}{C_2}.$$

Доказательство. Сначала докажем второй случай. Точка x является центром описанной окружности вытянутого треугольника abc . Пусть угол θ при вершине c меньше α . Предположим, что обе точки a и b принадлежат G или, что a было добавлено после b . Мы рассмотрим три случая в зависимости от того как получилась точка a . Пусть L обозначает длину отрезка ab .

Случай 1. Точка a является вершиной G , в этом случае b также вершина G и $f(a) \leq L$.

Случай 2. Точка a добавлена в центр круга с радиусом r' . Перед добавлением a этот круг был пустым, а значит $r' \leq L$. По индукции $f(a) \leq r' \cdot C_2$, а значит $f(a) \leq L \cdot C_2$.

Случай 3. Точка a добавлена в середину отрезка. Тогда опять же по индукции $f(a) \leq L \cdot C_1$.

В силу того, что $1 \leq C_2 \leq C_1$ в любом случае выполнено неравенство $f(a) \leq L \cdot C_1$. Пусть $r = \|x - a\|$ — радиус описанной окружности треугольника abc . Используя условие Липшица и равенство $L = 2r \sin \theta$ мы получаем

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(a) + r \\ &\leq L \cdot C_1 + r \\ &\leq 2r \cdot \sin \theta \cdot C_1 + r. \end{aligned}$$

Так как $\theta < \alpha$ и $C_2 \geq 1 + 2C_1 \sin \alpha$, то

$$r \geq \frac{f(x)}{1 + 2C_1 \sin \alpha} \geq \frac{f(x)}{C_2},$$

как и необходимо.

Используем похожую аргументацию для доказательства первого случая. Теперь x — середина отрезка ab . Пусть $r = \|x - a\| = \|x - b\|$ — радиус наименьшего круга, проходящего через точки a и b , и пусть p — вершина, захваченная отрезком ab . Вначале рассмотрим случай, в котором p лежит на входном ребре, у которого нет общих концов с ребром ab . Тогда $f(x) \leq r$ по условию (iii) определения локального радиуса точки. В другом случае разделение ребра ab вызвано отказом от добавления какого либо центра описанной окружности. Пусть p обозначает этот центр окружности радиусом r' . В силу того, что p лежит в круге с диаметром ab выполнено неравенство $r' \leq \sqrt{2}r$. Используя условие Липшица и индукцию, мы получаем

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(p) + r \\ &\leq r' \cdot C_2 + r \\ &\leq \sqrt{2}r \cdot C_2 + r. \end{aligned}$$

Что при условии $C_1 \geq 1 + \sqrt{2}C_2$ принимает вид

$$r \geq \frac{f(x)}{1 + \sqrt{2}C_2} \geq \frac{f(x)}{C_1},$$

что и требуется. □

Оценка сверху

Инварианты (А) и (В) гарантируют, что добавляемые вершины не могут быть сколь угодно близкими к предыдущим вершинам. Мы покажем, что отсюда следует, что они не могут быть близкими также и к последующим вершинам. Напомним, что K — конечная триангуляция, построенная с помощью алгоритма улучшения Делоне.

Лемма 2.5 (Лемма о наименьшем расстоянии). *Для любой пары вершин $a, b \in K$ выполнено неравенство $\|a - b\| \geq \frac{f(a)}{1 + C_1}$.*

Доказательство. Если b была добавлена раньше a , то $\|a - b\| \geq \frac{f(a)}{C_1} \geq \frac{f(a)}{1 + C_1}$. В другом случае $\|b - a\| \geq \frac{f(b)}{C_1}$ и следовательно

$$f(a) \leq f(b) + \|a - b\| \leq \|a - b\|(1 + C_1)$$

как и утверждалось. \square

Вершины не могут быть сколь угодно близкими, а значит мы можем использовать оценки для площади для того, что показать, что алгоритм завершит работу после добавления конечного количества вершин. Мы свяжем количество вершин с интегралом от функции $\frac{1}{f^2(x)}$. Напомним, что B это ограничивающий прямоугольник, использованный при построении K .

Лемма 2.6 (Оценка сверху). *Количество вершин в K не превосходит константы, умноженной на*

$$\int_B \frac{dx}{f^2(x)}.$$

Доказательство. Для каждой вершины $a \in K$ рассмотрим диск D_a с центром a и радиусом $r_a = \frac{f(a)}{2+2C_1}$. По лемме о наименьшем расстоянии эти диски попарно не пересекаются. Не менее четверти каждого диска лежит внутри B , а значит

$$\begin{aligned} \int_B \frac{dx}{f^2(x)} &\geq \frac{1}{4} \cdot \sum_a \int_{D_a} \frac{dx}{f^2(x)} \\ &\geq \frac{1}{4} \cdot \sum_a \frac{\pi r_a^2}{(f(a) + r_a)^2} \\ &\geq \frac{1}{4} \cdot \sum_a \frac{\pi}{(3 + 2C_1)^2}. \end{aligned}$$

Это и есть константа, умноженная на количество вершин. \square

Две геометрические леммы

Мы подготовим доказательство оценки снизу с помощью двух геометрических результатов о треугольниках, углы которых не меньше некоторой константы $\alpha > 0$. Стороны такого треугольника не могут сильно отличаться, а именно $\frac{\|a-c\|}{\|a-b\|} \leq \rho = \frac{1}{\sin \alpha}$. Если у нас есть цепочка треугольников, соединенных через общие стороны, то отношение отрезков не может превосходить ρ^t , где t — количество треугольников. Два отрезка с общей вершиной соединены цепочкой треугольников с этой вершиной, причем длина этой цепочки не превосходит $\frac{2\pi}{\alpha}$, так как мы не можем поместить больше углов в окрестности точки.

Лемма 2.7 (об отношении отрезков). *Отношение длин отрезков с общим вершиной не превосходит $\rho^{\frac{2\pi}{\alpha}}$.*

Второй результат посвящен покрытию треугольника четырьмя дисками: три диска с центрами в вершинах и один с центром в центре описанной окружности. Для

каждой вершины мы возьмем диск радиуса константа c_0 , умноженная на длину наименьшей стороны треугольника. Для центра описанной окружности мы будем брать диск радиуса $1 - c_2$, умноженной на радиус описанной окружности. Для произвольного треугольника, сохраняя c_0 фиксированным, мы можем заставить c_2 быть сколь угодно близким к 0, уменьшая угол треугольника. В случае если углы треугольника не могут быть сколь угодно малыми, то c_2 также будет отделено от 0.

Лемма 2.8 (Лемма о покрытии треугольника). *Для каждой константы $c_0 > 0$ найдется такая константа $c_2 > 0$, что указанные четыре круга покрывают треугольник.*

Доказательство. Пусть R — радиус описанной окружности и ab — наименьшая сторона треугольника. Ее длина $\|a - b\| \geq 2r \cdot \sin \alpha$. Круг с центром в a покрывает все точки на расстоянии не более $c_0 \cdot \|a - b\|$ от a ; без ограничения общности можно предположить, что $c_0 < \frac{1}{2}$. Расстояние от центра описанной окружности z до точки $y \in ab$, находящейся на расстоянии $c_0 \cdot \|a - b\|$ от a , оценивается как

$$\begin{aligned} \|y - z\| &< \sqrt{R^2 - c_0^2 \|a - b\|^2} \\ &\leq \sqrt{R^2 \cdot (1 - 4c_0^2 \cdot \sin^2 \alpha)} \\ &< R \cdot (1 - 2c_0^2 \cdot \sin^2 \alpha). \end{aligned}$$

Все остальные точки треугольника, не покрытые кругами с центрами a, b и c , находятся на большем расстоянии от z . В силу того, что c_0 и α положительные константы, то $c_2 = c_0^2 \cdot \sin^2 \alpha$. \square

Оценка снизу

Причиной для рассмотрения кругов радиусом $(1 - c_2)R$ в центрах описанных окружностей является то, что для точки x внутри этого круга локальный радиус не может быть сколь угодно малым. В частности, он не может быть меньше чем расстояние от центра описанной окружности, умноженное на косинус половины наименьшего угла, то есть $f(x) \geq c_2 R \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$. Для того, чтобы получить аналогичную оценку для кругов в вершинах, обозначим через L длину наименьшего отрезка инцидентного вершине a . Локальный радиус точки a не меньше чем $L \cdot \sin \alpha$. Выбрав $c_0 = \frac{\sin \alpha}{2}$, мы получаем, что $f(a) \geq 2c_0 L$ и следовательно $f(x) \geq f(a) - \|x - a\| \geq c_0 L$ для всех точек x внутри круга радиусом $c_0 L$ с центром в a .

Мы используем эти наблюдения, чтобы показать, что любой алгоритм, который строит треугольники с углами не менее $\alpha > 0$ добавляет не менее константы, умноженной на интеграл от $\frac{1}{f^2(x)}$, вершин. Отсюда следует, что алгоритм из раздела 2.2 строит сетку за асимптотически минимальное время.

Лемма 2.9 (об оценке снизу). *Если K треугольная сетка множества G , не содержащая треугольников с углами меньше α , то количество вершин K не меньше константы, умноженной на $\int_B \frac{dx}{f^2(x)}$.*

Доказательство. Вокруг каждой вершины $a \in K$ нарисуем круг радиусом $\frac{\sin \alpha}{2}$, умноженный на длину наименьшего отрезка, инцидентного a . Положим $c_0 = \sin \alpha \cdot \frac{\rho \alpha}{2}$

и с помощью леммы о покрытии треугольника найдем подходящее $c_2 > 0$. Для каждого треугольника $abc \in K$ нарисуем круг радиусом $1 - c_2$ умноженное на радиус описанной окружности с центром в центре описанной окружности. Каждый треугольник покрыт соответствующими четырьмя кругами, а значит и вся сетка покрыта всеми кругами.

Для каждого круга D_i пусть f_i обозначает минимум локального радиуса для точек $x \in D_i$. По аргументам, приведенным выше, это минимум больше либо равен какой-то фиксированной доли от радиуса диска D_i , то есть $f_i \geq \frac{r_i}{C}$. В силу того, что данные круги покрывают сетку, выполнены неравенства:

$$\begin{aligned} \int_B \frac{dx}{f^2(x)} &\leq \sum_i \int_{D_i} \frac{dx}{f^2(x)} \\ &\leq \sum_i \frac{r_i^2 \pi}{f_i^2} \\ &\leq \sum_i C^2 \pi. \end{aligned}$$

Количество треугольников меньше чем удвоенное количество вершин, которое мы обозначим через n . Следовательно

$$n \geq \sum_i \frac{1}{3} \geq \frac{1}{3C^2 \pi} \int_B \frac{dx}{f^2(x)},$$

что и требовалось. □

Задачи

1. **Остроугольные треугольники** (один балл). Треугольник называется *остроугольным* если все его углы меньше $\frac{\pi}{2}$. Отметим, что треугольник Делоне abc является остроугольным в том и только том случае когда дуальная вершина диаграммы Вороного содержится внутри abc . Докажите, что триангуляция K , все треугольники которой являются остроугольными, является триангуляцией Делоне множества вершин K .
2. **Граф Гэбриэла** (один балл). Пусть S — конечное множество точек на плоскости. Пусть $a, b \in S$ и рассмотрим наименьшую окружность C_{ab} , проходящую через a и b . Ребро ab принадлежит *графу Гэбриэла* G множества S если C_{ab} пуста и a и b единственные точки из S , лежащие на этой окружности.
 - (i) Докажите, что $ab \in G$, если и только если ab является ребром триангуляции Делоне множества S и противолежащие углы одного или двух треугольников, содержащих ab , меньше $\frac{\pi}{2}$.
 - (ii) Докажите, что $ab \in G$, если и только если ab пересекает дуальное ребро диаграммы Вороного $V_a \cap V_b$.
3. **Диаграмма Вороного для отрезков** (три балла). Пусть L множество из n отрезков на плоскости, попарно не имеющих общих точек. Назовем *расстоянием* от точки $x \in \mathbb{R}^2$ до отрезка $ab \in L$ минимальное из расстояний от x до

некоторой точки ab . Областью Вороного отрезка ab назовем множество таких точек x , которые не дальше от ab чем от других отрезков из L .

- (i) Докажите, что область Вороного каждого отрезка из L связна.
 - (ii) Докажите, что “ребра” областей Вороного являются отрезками или участками парабол.
 - (iii) Докажите, что количество ребер Вороного не превосходит константы, умноженной на n .
4. **Непересекающиеся ребра** (два балла). Пусть S — конечное множество точек плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой и никакие четыре не лежат на одной окружности. Два ребра ab и cd называются *пересекающимися*, если у них есть общая внутренняя точка. Пусть L — множества попарно непересекающихся отрезков с концами в точках S .
- (i) Докажите, что никакие два ребра триангуляции Делоне множества S не пересекаются.
 - (ii) Докажите, что никакие два ребра несвободной триангуляции Делоне множеств S и L не пересекаются.
5. **Окруженные вершины Вороного** (три балла). Рассмотрим триангуляцию Делоне конечного множества точек на плоскости. Пусть D подмножество треугольников триангуляции с границей B , состоящей из ребер, которые принадлежат ровно одному треугольнику из D . Мы назовем подмножество D *защищенным* если из того, что $abc \in D$ и $ab \in B$ следует, что угол c не тупой. Докажите, что все вершины диаграммы Вороного дуальные треугольникам защищенного подмножества D лежат в областях, покрытых D .

Глава 3

Трёхмерные триангуляции Делоне

В данной главе мы развиваем наши знания о триангуляциях Делоне на трёхмерный случай. Почти все свойства, которые мы знаем, мгновенно переносятся на случай размерности четыре и больше. Поэтому появляется искушение ввести положительный параметр d и все рассуждения в данной главе вести для случая d -мерного пространства. Мы не будем этого делать, чтобы сосредоточиться на трёхмерном случае и его отличительных свойствах. В разделе 3.1 вводятся диаграммы Вороного и трёхмерные триангуляции Делоне, а также объясняется их связь с граничными комплексами выпуклых полиэдров в \mathbb{R}^4 . В разделе 3.2 данные конструкции обобщаются для точек, каждая из которых имеет действительный вес. Раздел 3.3 обобщает операцию флипа для триангуляции Делоне в размерности три и выше, используя при этом классические теоремы выпуклой геометрии. В разделе 5.4 описывается и анализируется случайный алгоритм построения трёхмерной триангуляции Делоне с последовательным добавлением точек.

3.1 Подъём и полярность

Триангуляция Делоне конечного множества в \mathbb{R}^3 является двойственной к диаграмме Вороного того же множества. В данном разделе вводятся оба понятия и показывается как они могут быть получены с помощью проектирования границ выпуклых полиэдров.

Диаграммы Вороного

Областью Вороного точки p конечного множества $S \subseteq \mathbb{R}^3$ называется множество точек пространства, которые лежат не дальше от p чем от любой другой точки S :

$$V_p = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x - p\| \leq \|x - q\|, \forall q \in S\}.$$

Каждое неравенство определяет замкнутое полупространство и V_p — пересечение конечного набора таких полупространств. Другими словами V_p — выпуклый полиэдр, например как на следующем рисунке 3.1.

Рис. 3.1: Возможный многогранник Вороного

В общем случае каждая вершина V_p принадлежит трем граням и трем ребрам полиэдра. Если область V_p ограничена, то она является выпуклой оболочкой множества своих вершин. Случай с неограниченной V_p также возможен. В этом случае найдется такая плоскость проходящая через p , что все вершины S лежат на плоскости или по одну сторону от нее.

Области Вороного вместе с их общими гранями, ребрами и вершинами образуют *диаграмму Вороного* множества S . Точка x принадлежит k областям Вороного если она равноудалена от k точек, порождающих диаграмму. Отсюда следует, что данные k точек лежат на одной сфере. Если точки находятся в общем положении, то $k \leq 4$. Вершина диаграммы Вороного x принадлежит как минимум четырем областям Вороного, а в случае если точки находятся в общем положении, то ровно четырем.

Трехмерная триангуляция Делоне

Мы получаем *трехмерную триангуляцию Делоне* взятием дуального разбиения к диаграмме Вороного. Вершинами Делоне являются точки из S . Ребра Делоне соединяют вершины, порождающие области Вороного, у которых есть общая грань. Грани Делоне объединяют вершины, порождающие области Вороного с общим ребром. Если точки находятся в общем положении, то любое ребро принадлежит трем областям Вороного и все грани Делоне являются треугольниками. Многогранники Делоне соединяют точки множества, порождающие области Вороного с общей вершиной. Если точки находятся в общем положении, то каждая вершина принадлежит четырем областям Вороного и все многогранники Вороного являются тетраэдрами. Рассмотрим точку p на рисунке 3.1. У ее многогранника Вороного 14 граней, 36 ребер и 24 вершины. Следовательно, точка p принадлежит 14 ребрам Делоне, 36 треугольникам Делоне и 24 тетраэдрам Делоне.

Предполагая, что точки S находятся в общем положении, мы получаем, что триангуляция Делоне S представляет собой набор симплексов. Для того, чтобы доказать, что это симплициальный комплекс нам все еще нужно показать, что у симплексов нет недопустимых пересечений. Мы сделаем это, введя геометрические преобразования, которые связывают диаграммы Вороного и триангуляции Делоне в \mathbb{R}^3 с граничными комплексами выпуклых полиэдров в \mathbb{R}^4 .

Функции расстояния

Квадрат расстояния от точки $p \in S$ является функцией $\pi_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, определенной по правилу $\pi_p(x) = \|x-p\|^2$. Графиком этой функции является параболоид вращения в \mathbb{R}^4 . Мы упростим обозначения, забыв про разницу между функцией и ее графиком. На рисунке 3.2 показан пример для меньшей размерности.

Рис. 3.2: Параболоид как функция расстояния.

Рассмотрим набор из всех функций квадратов расстояний, определенных по точкам множества S . Поточечный минимум также является функцией $\pi_S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, определенной по правилу

$$\pi_S(x) = \min\{\pi_p(x) | p \in S\}.$$

ЕЕ графиком является нижняя граница поверхности, составленной из всех параболоидов. По определению области Вороного, $\pi_S(x) = \pi_p(x)$ если и только если x принадлежит области Вороного точки p . Следовательно мы можем думать об области Вороного V_p как о проекции части нижней границы, которая предоставлена параболоидом π_p .

Линеаризация

Квадратичная часть всех функций квадратов расстояний одинакова — $\|x\|^2$. После вычитания этого члена мы получим линейную функцию, а именно

$$\begin{aligned} f_p(x) &= \pi_p(x) - \|x\|^2 \\ &= (x - p)^T \cdot (x - p) - x^T \cdot x \\ &= -2p^T \cdot x + \|p\|^2. \end{aligned}$$

Графиком f_p является гиперплоскость в \mathbb{R}^4 . То же преобразование переводит плоскость $x_4 = 0$ в перевернутый параболоид Π , определенный графиком отображения, задаваемого равенством $\Pi(x) = -\|x\|^2$. На рисунке 3.3 показан результат применения преобразования к параболоиду и плоскости на рисунке 3.2.

Рис. 3.3: Перевернутый параболоид и плоскость.

Мы можем применить такое преобразование ко всему набору параболоидов одновременно. Каждая точка пространства \mathbb{R}^4 путешествует вертикально, то есть параллельно оси координат x_4 . Пройденное точкой расстояние это квадрат расстояния от нее до оси x_4 . При этом параболоиды переходят в гиперплоскости, пересечение параболоидов в пересечение гиперплоскостей, а нижняя граница семейства параболоидов в нижнюю границу семейства гиперплоскостей.

Заменим каждую гиперплоскость на замкнутое полупространство, лежащее снизу от гиперплоскости. Пересечением таких полупространств является выпуклый полиэдр в \mathbb{R}^4 , а нижняя граница семейства полуплоскостей его границей. Его граница это комплекс, состоящий из выпуклых граней размерностей 3, 2, 1, 0. В силу того, что наше преобразование передвигает точки вертикально, нижняя граница параболоидов переходит в нижнюю границу гиперплоскостей. В частности, проекция каждой трехмерной грани F является областью Вороного, а проекция всего граничного комплекса есть диаграмма Вороного.

Полярность

Нам все еще необходимо прояснить связь между описанной конструкцией и триангуляциями Делоне. Вместо того, чтобы сразу описать эту связь мы вначале изучим отношение между невертикальными гиперплоскостями и их полюсами в \mathbb{R}^4 .

Невертикальная гиперплоскость это график линейной функции $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, которая в общем виде определяется точкой $p \in \mathbb{R}^3$ и скаляром $c \in \mathbb{R}$ с помощью формулы

$$f(x) = -2p^T \cdot x + \|p\|^2 - c.$$

Гиперплоскость параллельная f и касающаяся Π определяется функцией $-2p^T \cdot x + \|p\|^2$. Вертикальное расстояние между двумя гиперплоскостями равно $|c|$. *Полюсом* плоскости f называется точка $g = f^* = (p, -\|p\|^2 + c)$. Вертикальное расстояние между g и f равно $2|c|$ и параллельная касательная гиперплоскость проходит посередине между f и g . Более того, вертикальная прямая, проходящая через g , также проходит через точку касания этой плоскости с Π . Отсюда следует, что $g \in \Pi$ если и только если f касается Π . Для невертикальных гиперплоскостей однозначно определяются понятия точек, лежащих *выше*, *ниже* и *на* них. Пусть f_1, f_2 — две невертикальные гиперплоскости, а g_1, g_2 — их полюса.

Лемма 3.1 (Об обратном порядке). *Точка g_1 лежит выше, на или ниже гиперплоскости f_2 если и только если g_2 лежит выше, на или ниже гиперплоскости f_1 соответственно.*

Доказательство. Пусть $g_i = (p_i, -\|p_i\|^2 + c_i)$ при $i = 1, 2$. Алгебраически то, что g_1 выше f_2 , выражается следующим неравенством:

$$-\|p_1\|^2 + c_1 > -2p_2^T \cdot p_1 + \|p_2\|^2 - c_2.$$

Перегруппировав слагаемые и используя коммутативность скалярного произведения, получаем

$$-\|p_2\|^2 + c_2 > -2p_1^T \cdot p_2 + \|p_1\|^2 - c_1.$$

Это и есть алгебраическое выражение для того, что g_2 лежит выше f_1 . Остальные случаи аналогичны. \square

Полярный полиэдр

Сейчас мы готовы построить трехмерную триангуляцию Делоне как проекцию граничного комплекса выпуклого полиэдра в \mathbb{R}^4 . Для каждой точки $p \in S$ рассмотрим точку $g_p = (p, -\|p\|^2)$ — полюс соответствующей гиперплоскости. Все точки g_p лежат на перевернутом параболоиде Π . Для каждой невертикальной гиперплоскости f рассмотрим замкнутое полупространство, ограниченное f сверху. Пусть G — пересечение всех таких полупространств; G содержит все точки g_p . G — выпуклый полиэдр в \mathbb{R}^4 . Его граница состоит из верхней части границы выпуклой оболочки вершин и “тени” продолженной до бесконечности в направлении $-x_4$. Гиперплоскость называется *опорной* для G если она пересекается с его границей, но не пересекается с его внутренностью. Лемма об обратном порядке позволяет получить следующее соответствие между G и F .

Лемма 3.2 (Опорная лемма). *Гиперплоскость f является опорной для G если и только если ее полюс $g = f^*$ лежит на границе F .*

Представьте, что мы исследуем поверхность G , перекаывая опорную гиперплоскость по его границе. Дуальное изображение представляет собой полюс,двигающийся по границе F . Для каждой k -мерной грани G мы получаем $(3 - k)$ -мерную грань F и наоборот. Исключительными случаями являются вертикальные гиперграни F , которым не грани F , возможно за исключение граней на бесконечности. Отношение между двумя граничными комплексами такое же как и отношение триангуляцией Делоне и диаграммой Вороного. Изоморфизм между диаграммой Вороного и граничным комплексом F влечет изоморфизм между граничным комплексом G (за

исключением вертикальных граней) и трехмерной триангуляцией Делоне. В силу того, что вершины G проектируются на точки S , то и весь полиэдр G проектируется в трехмерную триангуляцию Делоне S . И это в конечном итоге доказывает отсутствие неправильных пересечений симплексов Делоне. Трехмерная триангуляция Делоне конечного множества точек в общем положении является симплициальным комплексом.

3.2 Расстояние с весом

Соответствие между диаграммами Вороного и выпуклыми полиэдрами направляет нас к обобщению диаграмм Вороного и Делоне, образующих более обширный класс объектов. В данном разделе описывается обобщение, использующее точки с действительными весами. Внутри этого более широко класса диаграмм мы найдем связь между диаграммами Вороного и Делоне, которая отсутствует в более узком классе диаграмм без весов.

Коммутативная диаграмма

На рисунке 3.4 показана связь между диаграммами Вороного и трехмерными триангуляциями Делоне в \mathbb{R}^3 и выпуклыми полиэдрами в \mathbb{R}^4 , которая была установлена в разделе 3.1.

Рис. 3.4: Коммутативная диаграмма

V и D дуальны друг другу; F получается из V линеаризацией функций расстояния; в свою очередь V получается из F проектированием граничного комплекса. F и G полярны друг другу; G является выпуклой оболочкой точек, спроектированных на Π (продолженной до бесконечности в направлении $-x_4$); D является проекцией граничного комплекса G .

Мы будем называть G *вписанным* полиэдром, так как каждая его вершина лежит на Π , F — *описанным*, так как каждая его трехмерная грань порождает гиперплоскость, касающуюся Π . Свойство полиэдра быть вписанным или описанным является достаточно специальным. Мы используем веса для того, чтобы обобщить понятия диаграмм Вороного и Делоне и избавить полиэдры от необходимости быть вписанными или описанными. По техническим причинам мы все еще будем требовать, чтобы каждая вертикальная прямая пересекала F по лучу, а G по лучу или пустому множеству. Это несущественное ограничение, хотя иногда оно может доставить некоторые неудобства.

Точки с весами

Мы подготовимся к определению взвешенной диаграммы Делоне, введя понятие точки с действительным весом. Нам будет удобно писать вес точки как квадрат неотрицательного действительного числа или квадрат мнимой единицы, умноженной на неотрицательное действительное число. Мы будем думать о точке с весом

$\hat{p} = (p, P^2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ как о сфере с центром $p \in \mathbb{R}^3$ и радиусом P . *Степенью* или *расстоянием с весом* относительно \hat{p} называется функция $\pi_{\hat{p}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, которая определяется формулой

$$\pi_{\hat{p}}(x) = \|x - p\|^2 - P^2.$$

Данная функция положительна для точек x вне сферы и отрицательна для точек x внутри сферы. Различные случаи расположения точек допускают интуитивную геометрическую интерпретацию расстояния с весом. К примеру для положительного P^2 и точки x , которая находится вне сферы, это квадрат длины отрезка касательной, соединяющего точку x с точкой сферы. Что будет если точка x лежит внутри сферы? В разделе 1.1 мы видели, что множество точек с одинаковым взвешенным расстоянием относительно двух окружностей есть прямая. Аналогично множество точек в \mathbb{R}^3 с одинаковым взвешенным расстоянием относительно двух сфер есть плоскость. Если эти две сферы пересекаются, то эта плоскость пройдет через окружность пересечения. Если же две сферы не пересекаются и ни одна из них не лежит внутри другой, то эта плоскость будет их разделять.

Ортогональность

Пусть нам даны две сферы или точки с весом $\hat{p} = (p, P^2)$ и $\hat{q} = (q, Q^2)$. Мы обобщаем взвешенное расстояние до симметричной формы

$$\pi_{\hat{p}, \hat{q}} = \|p - q\|^2 - P^2 - Q^2.$$

Если $Q^2 = 0$, то это взвешенное расстояние от q до \hat{p} , а если $P^2 = 0$, то это взвешенное расстояние от p до \hat{q} . Мы будем называть \hat{p} и \hat{q} ортогональными если $\pi_{\hat{p}, \hat{q}} = 0$. На самом деле, если $P^2, Q^2 > 0$, то $\pi_{\hat{p}, \hat{q}} = 0$ если и только если две сферы пересекаются по окружности и две касательные плоскости в каждой точке этой окружности перпендикулярны. Ортогональность является ключевым понятием в обобщении обычных триангуляций Делоне на взвешенные триангуляции Делоне. Мы будем называть \hat{p} и \hat{q} *далее чем ортогональные* если $\pi_{\hat{p}, \hat{q}} > 0$.

Давай попробуем понять как веса влияют на процесс поднятия. Графиком функции расстояния с весом является параболоид, нулевым множеством которого, $\pi_{\hat{p}}^{-1}(0)$, является сфера \hat{p} . Как и раньше мы можем линеаризовать как и ранее и получить гиперплоскость, определяемую равенствами

$$\begin{aligned} f_{\hat{p}}(x) &= \pi_{\hat{p}}(x) - \|x\|^2 \\ &= -2p^T \cdot x + \|p\|^2 - P^2. \end{aligned}$$

Также мы можем перейти к полюсу этой плоскости и получить

$$g_{\hat{p}} = (p, -\|p\|^2 + P^2).$$

При этом ортогональность между двумя сферами переходит в отношение инцидентности между точками и плоскостями.

Лемма 3.3 (Лемма об ортогональности). *Сферы \hat{p} и \hat{q} ортогональны если и только если точка $g_{\hat{p}}$ лежит на плоскости $f_{\hat{q}}$.*

Доказательство. Алгебраическое выражение для того, что $g_{\hat{p}} \in f_{\hat{q}}$ есть

$$-2q^T \cdot p + \|q\|^2 - Q^2 = -\|p\|^2 + P^2,$$

что эквивалентно

$$(p - q)^T \cdot (p - q) - P^2 - Q^2 = 0,$$

что в свою очередь эквивалентно $\pi_{\hat{p}, \hat{q}} = 0$. □

Взвешенные трехмерные триангуляции Делоне

Пусть S — конечное множество сфер. В зависимости от применения мы можем думать о них как о сферах в \mathbb{R}^3 или точках с весами в $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Взвешенное расстояние может быть использовано для построения *взвешенной диаграммы Вороного* и *взвешенной триангуляции Делоне*, которая как обычно двойственна диаграмме Вороного. Вместо того, чтобы приводить технические подробности формального построения, которое в основном повторяет аналогичное построение для невзвешенных точек, мы проиллюстрируем это понятие на примере рисунка 3.5.

Рис. 3.5: Взвешенные диаграммы Вороного и Делоне

Для точек без веса тетраэдр принадлежит триангуляции Делоне если и только если сфера, проходящая через данные четыре точки, пуста. Для точек с весом, описанная сфера заменяется на *ортосферу*, то есть единственную сферу ортогональную всем четырем сферам с центрами в данных четырех точках. Ее центром является вершина диаграммы Вороного, принадлежащая четырем областям Вороного, а ее весом является взвешенное расстояние от этой точки до четырех данных сфер. Мы подведем итог, обобщив лемму об описанной окружности из Раздела 1.1 для трехмерного случая и взвешенного случая.

Лемма 3.4 (Лемма об ортосфере). *Тетраэдр принадлежит взвешенной триангуляции Делоне если и только если ортосфера соответствующих четырех сфер дальше чем ортогональна от всех остальных сфер из множества.*

Сфера из S является *избыточной* если ее область Вороного пуста. По определению центр сферы является вершиной взвешенной диаграммы Делоне если и только если она неизбыточна. Все экстремальные точки неизбыточны, следовательно триангулируемое пространство является выпуклой оболочкой S , как и в невзвешенном случае.

Локальная выпуклость

Напомним лемму Делоне из раздела 1.2, которая утверждает, что триангуляция конечного множества точек в \mathbb{R}^2 является триангуляцией Делоне если и только если каждое ее ребро является локальным ребром Делоне. Этот результат обобщается в трехмерном (и других размерностях) и взвешенном случае. Для этого мы определим *трехмерную триангуляцию* множества S как симплициальный комплекс K , основным пространством которого является $\text{conv } S$, а множеством вершин подмножество S . Треугольник $abc \in K$ называется *локально выпуклым* если

- (i). он принадлежит ровно одному тетраэдру и следовательно ограничивает выпуклую оболочку S или

- (ii). он принадлежит двум тетраэдрам $abcd$ и $abce$ и \hat{e} дальше чем ортогональна от ортосферы $abcd$.

Если все треугольники K являются локально выпуклыми, то после поднятия мы получим границу комплекса или выпуклого полиэдра. Это соотносится с правой частью коммутативной диаграммы на рисунке 3.4. Тем не менее, чтобы удостовериться, что данный полиэдр на самом деле G , мы также потребуем чтобы ни одна из поднятых точек не лежала вертикально ниже границы.

Лемма 3.5 (Лемма о локальной выпуклости). *Если $\text{Vert } K$ содержит все неизбыточные взвешенные точки и все треугольники локально выпуклые, то K является взвешенной триангуляцией Делоне множества S .*

Доказательство достаточно похоже на на лемму Делоне из Раздела 1.2 и мы не будем его повторять. Аналогично мы можем обобщить лемму об ацикличности на случай размерности три (и выше) и взвешенный случай. Детали достаточно понятны и мы их опустим.

3.3 Флипы

Целью этого раздела является обобщение идеи реберного флипа в размерность 3 и выше. Мы начнем с двух классических теорем выпуклой геометрии. Теорема Хелли посвящена структуре пересечений выпуклых множеств. Она может быть доказана с использованием теоремы Радона, которая посвящена разбиениям конечных множеств и напрямую связана с флипами в d -мерном пространстве. После этого мы определим флипы и обсудим возникающие структурные свойства в \mathbb{R}^3 .

Теорема Радона

Этот результат о $n \geq d + 2$ точках в \mathbb{R}^d . Случай $n = 4$ точек в \mathbb{R}^2 соответствует реберным флипам на плоскости.

Теорема 3.6 (Теорема Радона). *У любого множества S из $n \geq d + 2$ точек в \mathbb{R}^d есть такое разбиение $S = A \sqcup B$, что $\text{conv } A \cap \text{conv } B \neq \emptyset$.*

Доказательство. В силу того, что точек больше $d + 1$, они являются аффинно зависимыми. То есть существуют коэффициенты λ_i не равные нулю одновременно, что $\sum \lambda_i p_i = 0$ и $\sum \lambda_i = 0$. Пусть I есть подмножество индексов, что $\lambda_i > 0$, а J содержит все остальные индексы. Отметим, что $c = \sum_{i \in I} \lambda_i = -\sum_{j \in J} \lambda_j > 0$, а также

$$x = \frac{1}{c} \cdot \sum_{i \in I} \lambda_i p_i = -\frac{1}{c} \cdot \sum_{j \in J} \lambda_j p_j.$$

Пусть A подмножество точек p_i где $i \in I$, а B — множество остальных точек. Точка x выпуклая комбинация точек из A как и точек из B , то есть $x \in \text{conv } A \cap \text{conv } B$. \square

У $(d + 1)$ -мерного симплекса $d + 2$ вершины и грань для каждого подмножества вершин. Если мы спроектируем граничный комплекс симплекса на \mathbb{R}^d мы получим симплекс для каждого множества из не более чем $d + 1$ вершины. По теореме Радона, не менее двух из этих симплексов имеют непустое пересечение. Это пересечение получается их проектирования двух сторон границы симплекса друг на друга.

Теорема Хелли

Данный результат о $n \geq d + 2$ выпуклых множествах в \mathbb{R}^d . Для $d = 1$ теорема Хелли утверждает, что если у любой пары из $n \geq 2$ отрезков есть непустое пересечение, то и все семейство отрезков пересекается. Это верно, так как из условия следует, что самый правый из левых концов отрезков левее или совпадает с самым левым из правых концов отрезков. Отрезок между этими двумя концами принадлежит всем отрезкам.

Теорема 3.7 (Теорема Хелли). *Если любые $d+1$ множество из $n \geq d+2$ замкнутых выпуклых множеств в \mathbb{R}^d пересекаются, то и у всего семейства есть непустое пересечение.*

Доказательство. Предположим индуктивно, что данное утверждение верно для $n - 1$ выпуклого замкнутого множества. Для каждого C_i из нашего семейства из n множеств, пусть p_i — точка в общем пересечении остальных $n - 1$ множества. Пусть S — множество всех точек p_i . По теореме Радона найдется такое разбиение $S = A \sqcup B$ и точка $x \in \text{conv } A \cap \text{conv } B$. По построению, $\text{conv } A$ содержится в таких множествах C_j , что $p_j \in B$ и, аналогично, $\text{conv } B$ содержится во всех множествах C_i , где $p_i \in A$. Следовательно x содержится во всех множествах нашего семейства. \square

Возможные флипы симплекса

Рассмотрим случай $d = 2$. Проекцией 3-симплекса (тетраэдра) на \mathbb{R}^2 является выпуклый четырехугольник или треугольник. В первом случае две диагонали пересекаются, а во втором одна из вершин лежит внутри треугольника, порожденного тремя другими. Оба случая показаны на рисунке 3.6.

Рис. 3.6: Варианты проекции тетраэдра

Направление проекции определяет *верхнюю* и *нижнюю* стороны границы тетраэдра; две стороны границы встречаются на *силуэте* тетраэдра. Пусть $\alpha = \text{conv } A$ и $\beta = \text{conv } B$ — две грани, проекции которых имеют непустое пересечение. Они лежат на разных сторонах границы и мы предположим, что α принадлежит верхней, а β — нижней стороне. Четырехугольник определяет реберный флип, который заменяет проекцию нижней части на проекцию верхней части и наоборот. Мы также будем называть такую операцию *2 – 2 флипом*, так как она заменяет два старых треугольника на два новых. Случай треугольника определяет новый случай флипа, который мы будем называть *1 – 3* или *3 – 1 флипом* в зависимости от того добавляется ли новая вершина или удаляется старая.

Как можно обобщить данные наблюдения на случай $d = 3$? Как показано на рисунке 3.7,

Рис. 3.7: Варианты проекции четырехмерного симплекса

проекцией 4-симплекса на \mathbb{R}^3 является либо бипирамида, либо тетраэдр. В случае бипирамиды α является ребром, а β — треугольником. Есть три тетраэдра с ребром α , и они образуют верхнюю часть 4-симплекса. Оставшиеся два тетраэдра содержат β и образуют нижнюю часть. 3–2 *флип* заменяет проекцию верхней части на проекцию нижней части, в то время как 3–2 *флип* делает обратное. В случае тетраэдра α есть одна вершина, а β — тетраэдр, порожденный четырьмя остальными. 1–4 *флип* добавляет α , в то же время заменяя β на четыре тетраэдра, 4–1 *флип* удаляет α .

Преобразования

При использовании флипов для построения трехмерной триангуляции Делоне, нам встретятся случаи, когда мы хотели бы сделать флип, но не можем. Это случается только с 2-3 флипами. Пусть у тетраэдров $abcd$ и bcd есть общая грань bcd . Если ребро ae пересекает bcd , то мы можем заменить пару тетраэдров $abcd, bcd$ на тройку $baec, caed, daeb$, что является 2-3 флипом. Однако, если ae не пересекает bcd , как например показано на рисунке 3.8, где ae проходит за ребром bd , то мы не можем добавить ae , так как оно может пересекать другие треугольники в текущей триангуляции.

Рис. 3.8: Нельзя сделать флип

В этом случае объединение двух тетраэдров невыпукло. Без ограничения общности предположим, что bd ребро невыпуклости. Есть два случая. Если bd принадлежит трем тетраэдрам, то третий — $abde$, и мы можем заменить три тетраэдра $abcd, bcd, ebda$ на два — $bace, aced$. Это 3-2 флип. Однако, если bd принадлежит четырем или более тетраэдрам, то мы не можем удалить треугольник bcd . Это *непреобразуемый* случай.

Причиной для исследований флипов, естественно, является заинтересованность в алгоритме, который строит взвешенную триангуляцию Делоне с помощью флипов. Возможность существования непреобразуемых случаев не означает, что это невозможно. Возможно, где-то мы все еще можем делать флипы таким образом, что это избавит нас от непреобразуемых случаев, с помощью изменения их локальной окрестности. Но это требует дальнейшего анализа.

3.4 Алгоритм последовательного добавления

В данном разделе алгоритм из раздела 1.3 обобщается на случай размерности 3 и взвешенный случай. Алгоритм является инкрементальным, то есть он добавляет по одной точке с помощью последовательности флипов. Мы опишем данный алгоритм, покажем его корректность и обсудим время выполнения.

Алгоритм

Пусть S — конечное множество точек с весами в \mathbb{R}^3 . Обозначим эти точки как $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_n$ и предположим, что они находятся в общем положении. Для того, чтобы уменьшить количество возможных вариантов, рассмотрим достаточно большой

тетраэдр $wxyz$. В частности мы предполагаем, что $wxyz$ содержит внутри себя все точки множества S . Пусть $S_i = \{w, x, y, z, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_i\}$ при $0 \leq i \leq n$ и D_i — взвешенная триангуляция множества S_i . Алгоритм стартует с D_0 и последовательно добавляет точки. Добавление точки \hat{p}_i происходит с помощью последовательности флипов.

```

for  $i = 1$  to  $n$  do
  ищем  $pqrs \in D_i$ , содержащий  $\hat{p}_i$ ;
  if  $\hat{p}_i$  избыточна среди точек  $\hat{p}, \hat{q}, \hat{r}, \hat{s}$  then
    добавляем  $\hat{p}_i$  с помощью 1-4 флипа
  endif;
  while  $\exists$  локально невыпуклый треугольник  $bcd$  do
    флип  $bcd$ 
  endwhile;
endfor.

```

В процессе алгоритма у нас всегда есть триангуляция множества S , которую мы обозначим через K . Иногда K является взвешенной триангуляцией подмножества точек, но зачастую нет. Рассмотрим флип треугольника bcd из K . Пусть $abcd$ и $bcde$ — два тетраэдра, которые его содержат. Если их объединение выпукло, то флип треугольника bcd означает 2-3 флип, который заменяет bcd на ребро ae вместе с треугольниками aeb, aec, aed . В другом случае мы рассматриваем подкомплекс, порожденный вершинами a, b, c, d, e . Он состоит из всех симплексов K , порожденных подмножества данного множества из 5 вершин. Если базовое пространство индуцированного подкомплекса невыпукло, то мы не можем сделать флип с треугольником bcd . В другом случае оно является бипирамидой или тетраэдром. В первом случае флип означает 3-2 флип. Во втором — 4-1 флип, который убирает одну из вершин. Различные виды флипов изображены на рисунке 3.9.

Рис. 3.9: Виды флипов

Стек из треугольников

Флипы совершаются в последовательности, которая контролируется стеком. В каждый момент времени стек содержит все треугольники из линка точки p_i , которые не являются локально выпуклыми. Он также может содержать и другие треугольники из линка, но каждый треугольник содержится не более одного раза. Изначально в стеке четыре треугольника тетраэдра $pqrs$. Флипы продолжаются до тех пор, пока стек не опустеет.

```

while стек не пуст do
  pop  $bcd$  из стека;
  if  $bcd \in K$  and  $bcd$  не локально выпуклый
    and  $bcd$  можно преобразовать then
    применяем 2-3, 3-2 или 4-1 флип;
    добавляем новые треугольники из линка в стек
  endif;
endwhile.

```

Почему мы можем ограничиться только треугольниками из линка p_i ? Вне линка K совпадает с D_{i-1} , следовательно все треугольники локально выпуклы. Треугольник внутри линка соединяет ребро cd из линка с p_i . Пусть $xp_i cd$ и $p_i cdy$ два тетраэдра с общим треугольником $p_i cd$. Если их объединение выпукло, то мы можем удалить треугольник $p_i cd$ с помощью 2-3 флипа. После этого у нас получится тетраэдр $xcdy$ не инцидентный p_i , что противоречит тому, что D_i — взвешенная триангуляция Делоне. Если объединение невыпукло, то и треугольники xcd и cdy из линка также не локально выпуклы.

Корректность

Пусть K некоторая триангуляция, возникшая в какой-то момент времени после добавления \hat{p}_i , но до того как мы получили взвешенную триангуляцию Делоне множества S_i . Достаточно показать, что в K есть как минимум один не локально выпуклый треугольник из линка p_i , который можно преобразовать. Чтобы получить противоречие, предположим, что ни один из не локально выпуклых треугольников нельзя преобразовать. Пусть L множество тетраэдров в $K \setminus \text{St } p_i$, которые содержат хотя бы один треугольник в линке. Эти тетраэдры образуют колючую сферу вокруг p_i , похожую на колючую окружность на рисунке 3.10

Рис. 3.10: Колючая окружность

Пусть $L' \subseteq L$ содержит все тетраэдры, у которых треугольники из линка не локально выпуклы. По предположению $L' = \emptyset$. Для каждого тетраэдра из L рассмотрим его ортосферу \hat{z} и взвешенное расстояние $\pi_{\hat{p}_i, \hat{z}}$. Пусть $abcd$ тот тетраэдр, ортосфера которого минимизирует эту функцию. Тетраэдр $abcd \in L'$, или эквивалентно $\pi_{\hat{p}_i, \hat{z}} < 0$, так как иначе треугольник bcd из линка будет локально выпуклым, как и все остальные треугольники из линка.

Мы утверждаем, что треугольник bcd можно преобразовать. Предположим, что это не так. Пусть bd невыпуклое ребро объединения тетраэдров $abcd$ и $bcdp_i$, и пусть $abdx$ тетраэдр, также содержащий треугольник abd . Если bd единственное невыпуклое ребро, то $x \neq p_i$, иначе bcd можно преобразовать. Если есть еще одно невыпуклое ребро, скажем, bc , то пусть $abcy$ — тетраэдр, содержащий abc . Если $x = y = p_i$, то мы опять получаем противоречие, так как bcd можно преобразовать. Итого в любом случае $x \neq p_i$. Или эквивалентно abd не содержится в линке p_i . Рассмотрим луч, начинающийся в p_i и проходящий через внутренность треугольника abd . После пересечения линка этот луч пройдет через тетраэдр из L до того как достигнет $abcd$. Это показано на рисунке 3.10. Вне линка у нас есть настоящая триангуляция Делоне, а именно часть D_{i-1} . Для тетраэдров из D_{i-1} взвешенное расстояние до \hat{p}_i от их ортосфер увеличивается при движении по лучу, что противоречит минимальности при выборе $abcd$. Это окончательно доказывает, что флипы будут продолжаться до тех пор, пока мы не получим D_i .

Количество флипов

Для того, чтобы ограничить сверху количество флипов в наихудшем случае, мы можем интерпретировать наш алгоритм как приклеивание 4-симплексов к трехмер-

ной поверхности, состоящей из тетраэдров в \mathbb{R}^4 . Каждый флип соответствует 4-симплексу. Он удаляет или добавляет одно или четыре ребра. Если ребро в какой-то момент удалено, то оно не может быть добавлено снова. Отсюда следует, что наибольшее количество флипов не превосходит $2\binom{n}{2} < n^2$. Таким образом, мы построили алгоритм, который строит трехмерную триангуляцию Делоне множества из n точек за время $O(n^2)$. Размер конечной триангуляции не превосходит константы, умноженной на n^2 .

Существуют множества из n точек в \mathbb{R}^3 , триангуляции Делоне которых содержат не менее константы на n^2 тетраэдров. Рассмотрим, например, две скрещивающиеся прямые и поместим на каждую из них по $\frac{n}{2}$ точек без весов как показано на рисунке 3.11.

Рис. 3.11: Скрещивающиеся прямые и триангуляция Делоне

Рассмотрим по паре смежных точек на каждой из прямых. Сфера, проходящая через эти четыре точки, пуста, а значит эти четыре точки порождают тетраэдр Делоне. Грубая оценка на количество таких тетраэдров дает $\frac{n^2}{4}$. Тем не менее, для множеств точек, которые обычно возникают в практических задачах, количество тетраэдров Делоне обычно меньше чем некоторая константа, умноженная на n . Примерами таких множеств могут послужить плотные упаковки сфер, обычные при молекулярном моделировании, и хорошо распределенные множества, получаемые в результате генерации трехмерных сеток.

Ожидаемое время работы

Кажется неплохой идея посчитать вначале время работы для случайной перестановки точек, то есть когда построение проходит в случайном порядке. Однако, в силу того, что размер триангуляции может варьироваться между линейным и квадратичным количеством симплексов, анализ будет более сложным чем в случае двумерной триангуляции. Мы даже не можем утверждать, что ожидаемое время работы не превосходит $\log_2 n$ на размер итоговой триангуляции. На самом деле, это неверно так как существуют множества точек с линейным размером триангуляции Делоне, которые достигают промежуточного квадратичного размера с положительной вероятностью. Тем не менее, похожее утверждение верно если мы ограничим наше множество точек, взятым из фиксированного распределения. Предположим, что ожидаемый размер триангуляции Делоне случайного множества из k точек не превосходит $O(f(k))$. Если $f(k) = \Omega(k^{1+\varepsilon})$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то ожидаемое время работы алгоритма есть $O(f(n))$; в другом случае $O(n \log n)$. Аргументы аналогичны приведенным в разделе 1.3 и мы их опустим.

Задачи

1. **Вписанные многогранники** (три балла). Трехмерный многогранник называется *вписанным* в двумерную сферу если все его вершины лежат на сфере. Докажите, что куб с одной отрезанной вершиной не может быть вписанным.

Мы разрешаем геометрические преобразования куба, но ребра и грани должны быть прямолинейными, а комбинаторная структура такой же как на рисунке 3.12.

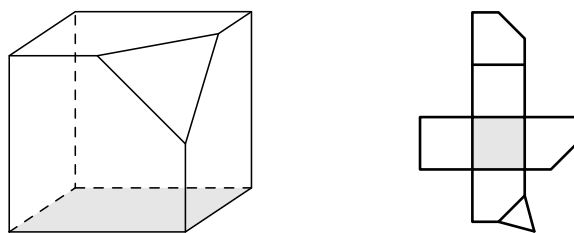


Рис. 3.12: Куб с отрезанной вершиной и его развертка.

2. **Хелли для прямоугольников** (два балла). Определим *прямоугольник* на плоскости \mathbb{R}^2 как множество точек (x_1, x_2) , где $\ell_i \leq x_i \leq r_i$, для некоторых действительных чисел ℓ_i, r_i при $i = 1, 2$. Пусть R конечное множество прямоугольников.
 - (i) Докажите, что если любые два прямоугольника из R пересекаются, то $\bigcap R \neq \emptyset$.
 - (ii) Обобщите понятие прямоугольника и предыдущее утверждение на случай размерностей 3 и выше.
3. **Теорема Юнга** (два балла). Теорема Юнга утверждает, что если из конечного множества точек на плоскости любые три содержатся в единичном круге, то и все множество содержится в единичном круге.
 - (i) Используйте двумерный вариант теоремы Хелли для того, чтобы доказать теорему Юнга.
 - (ii) Каким будет обобщение теоремы Юнга в пространстве размерности $d \geq 3$?
4. **Вырожденные комплексы Делоне** (два балла). *Гране-центрированная кубическая решетка (face-centered cubic lattice, FCC)* состоит из всех точек (i, j, k) с четной суммой $i + j + k$.
 - (i) Комплекс Делоне решетки FCC является вырожденным, так как в ней есть пустая сфера, которая проходит через шесть точек решетки. Что это за шесть точек?
 - (ii) Комплекс Делоне решетки FCC содержит всего два типа трехмерных клеток. Что это за типы?
5. **Не-Делоне комплексы** (один балл). Приведите пример трехмерного симплициального комплекса K с множеством вершин $S \subseteq \mathbb{R}^3$, все ребра которого принадлежат триангуляции Делоне D множества S ; основным пространством комплекса K является выпуклая оболочка S , то тем не менее $K \neq D$.
6. **Индукцированный подкомплекс** (три балла). Пусть S — конечное множество точек в \mathbb{R}^3 и D — триангуляция Делоне множества S . Для данного подмножества $T \subseteq S$ подкомплекс $K \subseteq D$, состоящий из всех симплексов D , все вершины которых принадлежат T , называется подкомплексом *индукцированным T* .

- (i) Докажите, что K также является подкомплексом триангуляции Делоне множества T .
- (ii) Используя предыдущий пункт, докажите, что если есть триангуляция Делоне, в которой отрезок пересекает один из треугольников, то найдется аналогичная триангуляция Делоне множества из пяти вершин.
7. **Кривая моментов** (три балла). *Кривой моментов* в \mathbb{R}^3 называется множество точек вида (t, t^2, t^3) при $t \in \mathbb{R}$. Пусть p_1, \dots, p_n — последовательность точек вдоль кривой моментов.
- (i) Докажите, что при $1 < i < j < n$ сфера, проходящая через точки $p_{i-1}, p_i, p_j, p_{j+1}$ является пустой, то есть внутри нее нет других точек p_ℓ .
- (ii) Найдите количество тетраэдров, треугольников и ребер в триангуляции Делоне множества p_1, \dots, p_n .
8. **Локальная выпуклость** (два балла). Пусть ab — ребро триангуляции K множества $S \subseteq \mathbb{R}^3$. Докажите, что если ab принадлежит не локально выпуклому треугольнику, то оно принадлежит как минимум трем таким треугольникам.

Глава 4

Тетраэдрические сетки

В данной главе изучаются задачи построения сеток из тетраэдров в \mathbb{R}^3 . Такие сетки являются трехмерными комплексами как и триангуляции, которые мы изучали в главе 3. Новыми вопросами, которые мы будем затрагивать, являются граничные условия и внимание к форме тетраэдров. Основной целью сеток является дискретное представление непрерывного пространства. Сами тетраэдры и их взаимное расположение не так важны как то, насколько хорошо они представляют пространство. К сожалению нет универсального критерия для хорошего или плохого представления пространства. В качестве базового ориентира, мы будем избегать очень маленьких и очень больших углов, так как обычно они негативно влияют на численные методы, основанные на сетках. В разделе 4.1 изучаются задачи возможной триангуляции невыпуклого полиэдра. В разделе 4.2 измеряются формы тетраэдров и вводится понятие отношения для трехмерных триангуляций Делоне. В разделе 4.3 алгоритм улучшения Делоне обобщается с двумерного на трехмерный случай. В разделе 4.4 изучаются отдельный неудобный тип тетраэдров и пути удалить их из сеток Делоне.

4.1 Сетки для полиэдров

В данной книге, задача построения сетки для объемной области заключается в разбиении полиэдра на тетраэдры, которые образуют полиэдральный комплекс. В данном разделе дается понятие о полиэдрах и исследуется задача о том, сколько нужно тетраэдров для построения сетки.

Полиэдры и грани

Полиэдром называется объединение выпуклых полиэдров, то есть $P = \bigcup_{i \in I} H_i$, где I — конечное множество индексов и каждое H_i есть конечное семейство полупространств. Например, полиэдра на рисунке 4.1 может быть представлен как объединение четырех выпуклых полиэдров. Как можно видеть, его грани не обязательно

Рис. 4.1: Пример полиэдра.

односвязны. Мы будем использовать определение, которое позволяет граням быть даже не связными.

Пусть b — единичный шар с центром в начале координат \mathbb{R}^3 . Для точки x рассмотрим достаточно малую окрестность $N_\varepsilon(x) = (x + \varepsilon \cdot b) \cap P$. *Граничной фигурой* точки x является увеличенная копия ее окрестности внутри в полиэдра $x + \bigcup_{\lambda > 0} \lambda \cdot (N_\varepsilon(x) - x)$. *Грань* P это замыкание максимального семейства точек с одинаковыми граничными фигурами. Чтобы отличать грани P от ребер и треугольников триангуляции Делоне, которую мы будем строить, мы будем называть одномерные и двумерные грани P отрезками и гипергранями. Отметим, что у полиэдра на рисунке 4.1 24 вершины, 30 отрезков, 11 гиперграней и две трехмерных грани, а именно внутренняя с граничной фигурой \mathbb{R}^3 и внешняя с пустой граничной фигурой. Шесть отрезков и три гиперграни не связны. Кроме того, две грани, передняя и задняя, связны, но не односвязны.

Разбиения на тетраэдры

Разбиение на тетраэдры полиэдра P это симплициальный комплекс K , основным пространством которого является P , то есть $|K| = P$. В силу того, что симплициальные комплексы конечны по определению, то на тетраэдры можно разбить только конечные полиэдры. Разбиение на тетраэдры полиэдра P триангулирует каждую гипергрань и каждый отрезок своим подкомплексом. Каждая вершина P обязательно является вершиной K .

В скором времени мы увидим, что у любой ограниченный полиэдр можно разбить на тетраэдры. Интересно отметить, что существуют полиэдры, любое разбиение на тетраэдры которых, содержит больше вершин чем сам полиэдр. Минимальным примером является полиэдр Шенхардта, приведенный на рисунке 4.2. Его можно по-

Рис. 4.2: Полиэдр Шенхардта.

лучить из треугольной призмы с помощью небольшого вращения одного основания относительно другого. Шесть вершин данного полиэдра порождают $\binom{6}{4} = 15$ тетраэдров, которые можно разделить на три типа, представленные, например, тетраэдрами $abcA, abAB, bcCA$. У всех этих трех тетраэдров есть общее ребро bA . Но этот отрезок находится вне полиэдра Шенхардта, а значит ни один из 15 тетраэдров не содержится внутри этого полиэдра. Следовательно, полиэдр Шенхардта не может быть разбит на тетраэдры без добавления новых вершин. Однако с добавлением новых вершин это несложно сделать. Самый простой способ это добавить точку z в центре и рассмотреть конусы с вершиной в z к 6 вершинам, 12 ребрам и 8 треугольникам на границе полиэдра.

Построение перегородок

Мы дадим конструктивное доказательство того, что любой полиэдр разбивается на тетраэдры. Для упрощения предположим, что P в каждой точке является трехмерным, то есть P совпадает с замыканием своей внутренности. Будет удобно так расположить P , что ни одна его гипергрань не лежит в вертикальной плоскости и ни один отрезок не содержится в вертикальной прямой. Назовем две точки x и y из P *вертикально видимыми* если x и y лежат на общей вертикальной прямой и отрезок xy содержится в P . *Перегорodka* отрезка состоит из всех точек $x \in P$ вертикально

видимых из какой-нибудь точки y отрезка. Разбиение на тетраэдры строится в три шага, первый из которых показан на рисунке 4.3.

Рис. 4.3: Разбиение на перегородки.

- Шаг 1.** Для каждого отрезка построим перегородку. Построенные перегородки разбивают P на вертикальные цилиндры, каждый из которых ограничен гипергранью сверху и снизу и окружен частями перегородок, которые называются *стенами*.
- Шаг 2.** Триангулируем нижнее основание каждого цилиндра и строим новые перегородки для новых отрезков, в результате получая разбиение на треугольные цилиндры.
- Шаг 3.** Разбиваем каждую стену на треугольники и в завершении разбиваем на тетраэдры каждый цилиндр, построив конусы из фиксированной внутренней точки к границе.

Верхняя граница

Мы проанализируем полученное разбиение на тетраэдры, полученное с помощью возведения перегородок, и докажем, что итоговое количество тетраэдров не превосходит константы, умноженной на квадрат количества отрезков.

Лемма 4.1 (Лемма о верхней границе). *Разбиение на тетраэдры полиэдра с m отрезками, полученное в результате выполнения трех шагов, содержит не более $28m^2$ тетраэдров.*

Доказательство. Перегородки, построенные во время шага 1, могут пересекаться по вертикальным ребрам. Каждое пересечение соответствует пересечению вертикальных проекций начальных отрезков. Общее число пересечений не превосходит $\binom{m}{2}$. Каждый отрезок порождает перегородку и каждое пересечение, в котором этот отрезок участвует, может разрезать одну из стен перегородки на две. Таким образом, общее количество стенок не превосходит $m + 2\binom{m}{2} = m^2$. Цилиндр, ограниченный k стенками, разбивается на $k - 2$ треугольных цилиндра с помощью $k - 3$ новых стенок. Следовательно, шаг 2 увеличивает количество стенок до не более чем $3m^2$. Общее количество цилиндров после этого шага не превосходит $2m^2$. Каждая стенка является треугольной или четырехугольной и может быть разделена на две части отрезком, который ее определяет. Следовательно шаг 3 триангулирует каждую стену не более чем на 4 треугольника и разбивает каждый цилиндр не более чем на 14 тетраэдров. Таким образом, конечное разбиение содержит не более $28m^2$ тетраэдров. \square

Седловидная поверхность

В качестве подготовки перед получением нижней оценки, мы изучим *гиперболический параболоид*, задаваемый уравнением $x_3 = x_1 \cdot x_2$. На рисунке 4.4 показан параболоид с помощью его пересечений с вертикальными плоскостями $\pm x_1 \pm x_2 = 1$.

Рис. 4.4: Параболоид.

Произвольная прямая в плоскости Ox_1x_2 задается уравнением $ax_1 + bx_2 + c = 0$. Для того, чтобы определить пересечение параболоида с вертикальной плоскостью, проходящей через эту прямую, мы можем выразить x_1 через x_2 или наоборот.

$$x_3 = -\frac{b}{a}x_2^2 - \frac{c}{a}x_2,$$

$$x_3 = -\frac{a}{b}x_1^2 - \frac{c}{b}x_1.$$

Если $a \cdot b \neq 0$, то мы получим параболу. При $a = 0$ мы получим прямую для каждого значения $\frac{c}{b}$, в качестве образцов помотрим на прямые с целыми значениями. Аналогично при $b = 0$ мы получим однопараметрическое семейство прямых, из которого в качестве образцов возьмем прямые с целыми значениями $\frac{c}{a}$. На рисунке 4.5 показана малая часть данных семейств. Если две точки x и y лежат на параболоиде, то отрезок

Рис. 4.5: Сечения параболоида.

между ними также лежит на параболоиде если и только если вертикальные проекции x и y на плоскость Ox_1x_2 лежат на одной горизонтальной или вертикальной прямой. Если у прямой, соединяющей проекции, положительный наклон, то отрезок лежит выше параболоида, если отрицательный — ниже.

Построение нижней границы

Мы построим полиэдр Q из куба, сделав в нем клинообразные вырезы, руководствуясь направляющими параболоида. Построение показано на рисунке 4.6. Если у нас

Рис. 4.6: Куб с вырезами.

есть по n вырезов сверху и снизу, то у нашего полиэдра будет $14n + 8$ отрезков.

Лемма 4.2 (Лемма о нижней границе). *Любое разбиение на тетраэдры полиэдра Q состоит как минимум из $(n + 1)^2$ тетраэдров.*

Доказательство. Рассмотрим клетчатую доску, которая получается на седловидной поверхности после пересечений $2n + 4$ линиями ($2n$ из концов разрезов и 4 — стороны кубы). Рассмотрим по точке в каждом из квадратов клетчатой доски, получающиеся небольшим поворотом квадратной решетки с рисунка 4.5. Ребро, соединяющее любые две точки пересечения, пересекает как минимум один вырез, так как края вырезов проходят достаточно близко к седловидной поверхности. Отсюда следует, что в любом разбиении Q на тетраэдры данные $(n + 1)^2$ точек будут в разных тетраэдрах. \square

4.2 Форма тетраэдра

В данном разделе рассматриваются различные формы тетраэдров. Здесь мы будем называть тетраэдр хорошим, если отношение его радиуса описанной сферы к наименьшему ребру небольшое. Скоро мы увидим, что в сетках с малым отношением выполняются некоторые комбинаторные свойства, например, ограничен размер звезды вершины.

Классифицируя тетраэдры

Классификация тетраэдров по их форме достаточно нечеткое мероприятие. Мы нормализуем все, приведя тетраэдры к единичному диаметру. У нормализованного тетраэдра небольшой объем, так как либо все его вершины находятся близко к какой-либо прямой, либо близко к какой-либо плоскости. В первом случае тетраэдр называется *вытянутым* и мы выделим 5 случаев в зависимости от того, как вершины тетраэдра объединяются в группы относительно данной прямой. С точностью до симметрии это случаи 1-1-1-1, 1-1-2, 1-2-1, 1-3, 2-2, которые показаны на рисунке 4.7 слева направо. У *плоского* тетраэдра также маленький объем, однако он не явля-

Рис. 4.7: Вытянутые тетраэдры.

ется вытянутым. Существует четыре типа таких тетраэдров в зависимости от того есть ли две близкие вершины, три вершины близкие к одной прямой, ортогональная проекция на близкую плоскость есть треугольник или четырехугольник. Все четыре типа показаны слева направо на рисунке 4.8.

Рис. 4.8: Плоские тетраэдры, самый правый — в виде воздушного змея.

Отношение радиуса описанной окружности к наименьшему ребру

У тетраэдра $abcd$ есть единственная описанная сфера. Пусть $R = R(abcd)$ — радиус этой сферы, а $L = L(abcd)$ — длина наименьшего ребра тетраэдра. Мы будем измерять качество тетраэдра с помощью отношения

$$\rho = \rho(abcd) = \frac{R}{L}.$$

Также мы можем определить ρ для треугольников, как отношение радиуса описанной окружности к наименьшей стороне. Отметим, что отношение для тетраэдра не меньше чем отношение для каждого из его четырех треугольников.

Треугольник abc минимизирует отношение в том и только том случае когда он равносторонний; в этом случае центр описанной окружности также является барицентром,

$$y = \frac{1}{3}(a + b + c) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}c,$$

где $x = \frac{1}{2}(a + b)$. Из нормализации следует, что длины всех ребер равны 1. Следовательно отношение равно радиусу описанной окружности, который равен

$$\|c - y\| = \frac{2}{3}\|c - x\| = \frac{2}{3}\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,577\dots$$

Тетраэдр $abcd$ минимизирует отношение в том и только том случае, когда он является правильным и в этом случае, опять же, центр описанной сферы является барицентром

$$z = \frac{1}{4}(a + b + c + d) = \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}d.$$

Из нормализации следует, что все шесть ребер имеют длину 1, а отношение равно радиусу описанной сферы, то есть

$$\|d - z\| = \frac{3}{4}\|d - y\| = \frac{3}{4}\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{4} = 0,612\dots$$

Обы вычисления показаны на рисунке 4.9.

Рис. 4.9: Вычисления для правильного треугольника и тетраэдра.

У *вытянутого* треугольника маленькая площадь. У него есть либо короткая сторона, либо большой радиус описанной окружности. В обоих случаях его отношение велико. Некоторые грани вытянутого тетраэдра являются вытянутыми треугольниками, а значит и отношение для вытянутого тетраэдра велико. У плоского тетраэдра, не являющегося воздушным змеем, есть либо короткая сторона, либо большой радиус описанной окружности, а значит его отношение большое. Единственный не рассмотренный случай тетраэдра с малым объемом — воздушный змей, и для него ρ может быть равно $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707\dots$ или даже немного меньше.

Свойство отношения

Будем говорить, что сетка из тетраэдров обладает *свойством отношения* ρ_0 если $\rho \leq \rho_0$ для всех тетраэдров из этой сетки. Мы предполагаем, что каждый треугольник в сетке является гранью какого-либо тетраэдра. Отсюда следует, что $\rho \leq \rho_0$ для каждого треугольника. Мы докажем два элементарных факта о длинах ребер в сетке K , которая обладает свойством отношения ρ_0 .

Лемма 4.3 (Утверждение А). *Если abc треугольник из K , то*

$$\frac{1}{2\rho_0}\|a - b\| \leq \|a - c\| \leq 2\rho_0\|a - b\|.$$

Доказательство. Длина стороны треугольника не превосходит удвоенного радиуса описанной окружности $\|a - b\| \leq Y$. По предположению $\|a - b\| \geq Y/\rho_0$. Аналогичные неравенства верны и для $\|a - c\|$ откуда и следует доказываемое. \square

Далее мы покажем, что если K обладает свойством отношения и кроме того является триангуляцией Делоне, то ребра с общей вершиной и малым углом не могут сильно отличаться по длине. Для того, чтобы это выполнялось не нужно, чтобы ребра принадлежали одному треугольнику. Положим

$$\eta_0 = \arctg 2 \left(\rho_0 - \sqrt{\rho_0^2 - \frac{1}{4}} \right).$$

η_0 также является константой как и ρ_0 .

Лемма 4.4 (Утверждение В). *Если угол между ab и ap меньше чем η_0 , то*

$$\frac{\|a - b\|}{2} < \|a - p\| < 2\|a - b\|.$$

Доказательство. Рассмотрим описанную окружность тетраэдра, содержащего ab в качестве ребра, пусть $\hat{y} = (y, Y^2)$ — окружность, по которой плоскость, проходящая через a, b и p , пересекает сферу. Мы будем использовать рисунок 4.10 для иллюстрации доказательства. Пусть v — середина отрезка ab , а x такая точка на окружности,

Рис. 4.10: Лемма В.

что y, v, x лежат на одной прямой причем именно в таком порядке. По предположению $Y \leq \rho_0 \cdot \|a - b\|$. Расстояние между x и v можно выразить следующим образом

$$\begin{aligned} \|x - v\| &= Y - \sqrt{Y^2 - \frac{\|a - b\|^2}{4}} \\ &\geq \left(\rho_0 - \sqrt{\rho_0^2 - \frac{1}{4}} \right) \cdot \|a - b\|, \end{aligned}$$

так как разность между Y и $\sqrt{Y^2 - C}$ увеличивается при увеличении Y . Угол между ab и ax равен

$$\begin{aligned} \angle bax &= \arctg \left(2 \frac{\|x - v\|}{\|a - b\|} \right) \\ &\geq \arctg 2 \left(\rho_0 - \sqrt{\rho_0^2 - \frac{1}{4}} \right) \\ &= \eta_0. \end{aligned}$$

Требуемая нижняя граница следует из того, что окружность вынуждает ap быть не короче ax , что в свою очередь длиннее половины ab . Необходимая верхняя граница на длину ap следует из симметричных рассуждений с переменной ролей для точек b и p . \square

Отношение длин

Мы будем использовать утверждения А и В, чтобы показать, что отношение длин ребер с общей вершиной a в K ограничено некоторой константой. Как и раньше предположим, что K обладает свойством отношения и является триангуляцией Делоне. Положим $m_0 = \frac{2}{1-\cos(\eta_0/4)}$ и $\nu_0 = 2^{2m_0-1} \cdot \rho_0^{m_0-1}$. В силу того, что ρ_0 и η_0 константы, то и m_0 и ν_0 .

Лемма 4.5 (Лемма об отношении длин). *Если ab и ap ребра из K , то*

$$\frac{\|a-b\|}{\nu_0} \leq \|a-p\| \leq \nu_0 \cdot \|a-b\|.$$

Доказательство. Пусть Σ — сфера направлений из точки a . Рассмотрим максимальную упаковку сферических шапочек, каждая с углом $\frac{\eta_0}{4}$. Это означает, что если y центр, а x граничная точка шапочки, то $4\angle xay = \eta_0$. Площадь каждой шапочки равна $\frac{1-\cos(\eta_0/4)}{2}$ на площадь Σ , а значит всего шапочек не больше m_0 .

Увеличив шапочки до радиуса $\frac{\eta_0}{2}$, вместо максимальной упаковки мы получим покрытие Σ . Для каждого ребра ab из звезды a пусть $b' \in \Sigma$ это радиальная проекция b на сферу. Аналогично, для каждого треугольника abc рассмотрим дугу, которая является радиальной проекцией ребра bc на сферу Σ . Точки и углы образуют плоский граф. Пусть ab самое длинное, а ap самое короткое ребро из звезды a . Рассмотрим путь в графе из точки b' в точку p' . Этот путь проходит из шапочки в шапочку, мы запишем последовательность шапочек, игнорируя возможные обходы, которые возвращают в уже пройденные шапочки. Последовательность состоит максимум из m_0 шапочек. Отследим длину ребра во время указанного обхода. Пока мы остаемся внутри шапочки утверждение В дает нам, что длина уменьшается не больше чем в два раза. Если же мы переходим в следующую шапочку, то по утверждению А длина уменьшается не более чем в $2\rho_0$ раз. Следовательно $\|a-p\| > \|a-b\|/\nu_0$. Ограничение сверху получается из симметричных соображений. \square

Постоянная степень

Непосредственная оценка объема вместе с леммой об отношении длин дает нам возможность доказать, что любая вершина из K принадлежит ограниченному количеству ребер. Пусть $\delta_0 = (2\nu_0^2 + 1)^3$ — новая константа.

Лемма 4.6 (Лемма о степени). *Каждая вершина K принадлежит не более чем δ_0 ребрам.*

Доказательство. Пусть ab самое длинное, а ap самое короткое ребро в звезде a . Без ограничения общности положим $\|a-p\| = 1$. Пусть c какой-то сосед a , а d — сосед c . Мы знаем, что по предположению $\|a-c\| \geq 1$ и по лемме об отношении длин $\|d-c\| \geq 1/\nu_0$. Для каждой точки c соседней с a рассмотрим Γ_c — открытый шар с центром в c и радиусом $\frac{1}{2\nu_0}$. Данные шары попарно непересекаются и помещаются внутри шара Γ с центром в a и радиусом $\|a-b\| + \frac{1}{2\nu_0}$. Объем Γ равен

$$\begin{aligned} \text{vol } \Gamma &= \frac{4\pi}{3} \left(\|a-b\| + \frac{1}{2\nu_0} \right)^3 \\ &\leq \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1+2\nu_0^2}{2\nu_0} \right)^3 \\ &= (2\nu_0^2 + 1)^3 \cdot \text{vol } \Gamma_c. \end{aligned}$$

Другими словами, не более $\delta_0 = (2\nu_0^2 + 1)^3$ соседних шаров может поместиться внутри Γ . Отсюда следует, что количество соседей a не превосходит δ_0 . \square

Константа δ_0 из леммы о степени ужасно велика. Основной причиной для это служит то, что константа ν_0 из леммы об отношении длин также ужасно велика. Было бы неплохо найти более прямое доказательство этой леммы и получить константу более разумного вида.

4.3 Улучшение Делоне

В данном разделе обобщается алгоритм улучшения Делоне из раздела 2.2 на трехмерный случай. Дополнительная размерность усложняет алгоритм. В частности, необходима аккуратность для того, чтобы избежать бесконечного заикливания при переключении с улучшения отрезков на улучшение гиперграней входного полиэдра и наоборот.

Алгоритм улучшения

По техническим причинам мы ограничимся рассмотрением только ограниченных полиэдров P без внутренних углов меньших $\frac{\pi}{2}$. Данное условие применимо к углам между двумя отрезками, между отрезком и гипергранью и между двумя гипергранями. Например полиэдр на рисунке 4.1 нам подходит, а полиэдр на рисунке 4.2 — нет. Наша цель — построить триангуляцию Делоне D , удовлетворяющую свойству отношения ρ_0 , с подкомплексом $K \subseteq D$, который разбивает P . Первый шаг алгоритма вычисляет D как триангуляцию Делоне множества вершин полиэдра P . Если нам не повезло, то у нас останутся отрезки не покрытые ребрами D и гипергранями не покрытые треугольниками из D . Чтобы получить эти отрезки и грани мы будем добавлять точки и восстанавливать триангуляцию Делоне с помощью инкрементального алгоритма из раздела 3.4. Точки добавляются и использованием трех правил, приведенных ниже.

Нам понадобится несколько определений. Отрезок из P разбивается на *подотрезки* вершинами триангуляции Делоне, которые лежат на нем, а грань разбивается на (треугольные) *подграницы* вершинами, которые лежат на грани или на ее границе. Вершина *захвачена* подотрезком, если она находится внутри сферы, для которой данный подотрезок служит диаметром, и вершина *захвачена* подгранью если она находится внутри сферы, у которой данная подгрань лежит в экваторе. В обоих случаях это минимальный сферы, которые проходят через вершины подотрезка или подграницы.

Правило 1. Если отрезок захватывает какую-либо вершину, то мы разделяем его, добавляя новую вершину триангуляции Делоне в его середину. Новые подотрезки могут захватывать или не захватывать точки и деление продолжается до тех пор пока ни один из отрезков не будет ничего захватывать.

Правило 2. Если подгрань захватывает одну из точек, то мы добавляем центр x ее описанной окружности в качестве новой вершины триангуляции Делоне. Однако, если x захвачена один или более подотрезками, то мы не добавляем x , вместо этого разбивая эти подотрезки.

Правило 3. Если у тетраэдра из D отношение радиуса описанной сферы к длине наименьшего ребра $\frac{R}{L} > \rho_0$, то мы разбиваем этот тетраэдр, добавляя его центр описанной сферы x в качестве новой точки триангуляции Делоне. Но если x захвачена каким-либо подотрезком или подгранью, то мы не добавляем x , разбивая вместо этого подотрезки или подграницы.

Правило 1 приоритетно над **Правилом 2**, а **Правило 2** над **Правилом 3**. В тот момент когда мы добавляем точку на гипергрань, данный приоритет гарантирует нам, что все граничные отрезки уже подразделены ребрами триангуляции Делоне. Аналогично, когда бы добавляем точку внутри полиэдра P , то граница P уже подразбита треугольниками D . Точка, которая рассматривается в качестве добавляемой имеет *тип*, который совпадает с номером правила, которое рассматривается, или, эквивалентно, это размерность симплекса, который разбивается. Точки типа 1 разбивают отрезки и всегда добавляются когда мы их рассматриваем. Точки типов 2 и 3 могут быть отклонены.

Локальная плотность

Как и в двумерном случае *локальный радиус точки* очень важен для понимания алгоритма улучшения Делоне. Это функция $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, где $f(x)$ — минимальный радиус шара с центром в x , который пересекает две непересекающиеся грани P . Отметим, что f отделена от нуля некоторой константой. Несложно показать, что f удовлетворяет условию Липшица

$$f(x) \leq f(y) + \|x - y\|.$$

Отсюда следует, что f непрерывна на \mathbb{R}^3 и более того данное условие утверждает, что f мало меняется при малом изменении x .

Локальный радиус точки связан с *радиусом добавления* r_x точки x , который равен длине кратчайшего ребра Делоне с концом в x сразу после добавления x . Если x это вершина P , то r_x это расстояние до ближайшей вершины P . Если x типа 1 или 2, то r_x это расстояние до ближайшей захваченной вершины. Если такой захваченной вершины не существует так как она была отклонена, то r_x есть либо половина подотрезка в случае когда x типа 1, либо радиус описанной окружности подграницы если x типа 2. И наконец r_x равно радиусу описанной сферы тетраэдра, который x разбивает, если она типа 3. Мы также определим радиус добавления для точек, которые рассматривались как возможные к добавлению, но были отклонены так как они захватывались подотрезком или подгранью. Это делается с помощью гипотетического добавления точки и рассмотрения кратчайшего ребра в гипотетической звезде.

Радиусы и предки

Точки добавляются последовательно и для каждой новой точки есть предшественники, которые ответственны за ее добавление. Если x типа 1 или 2, то мы определим ответственного *предка* $p = p_x$ как захваченную точку, которая вызвала добавление x . Точка p может быть вершиной триангуляции Делоне или отклоненным центром окружности или сферы. Если захвачены несколько точек, то p ближайшая к x из них. Если x типа 3, то p — последний из добавленных концов кратчайшего ребра тетраэдра, который разбивается точкой x .

Лемма 4.7 (Лемма о радиусе). Пусть x — вершина из D и p ее предок, если он существует. Тогда $r_x \geq f(x)$ или $r_x \geq c \cdot r_p$, где $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$, если x типа 1 или 2, и $c = \rho_0$ если x типа 3.

Доказательство. Если x вершина P , то r_x — расстояние до ближайшей вершины P . Это расстояние не меньше чем $f(x)$. В оставшейся части доказательства мы будем считать, что x не является вершиной P . Тогда у нее есть предок $p = p_x$. Вначале рассмотрим случай когда p вершина P . Если x типа 1 или 2, то она лежит на отрезке или гиперграни P и p не содержится в этой грани. Следовательно $r_x = \|x - p\| \geq f(x)$. Если x типа 3, то у тетраэдра разделенного x есть хотя бы две точки из P , а значит как и раньше $r_x = \|x - p\| \geq f(x)$. Теперь рассмотрим случай когда p не является вершиной P . Если x типа 1 или 2, то p была отклонена, чтобы x была добавлена. В силу того, что p захвачена подотрезком или подгранью, которая была разбитой точкой x , то расстояние от p до ближайшей вершины этого подотрезка или подграни не больше чем в $\sqrt{2}$ раз больше чем расстояние от x до той же вершины. Следовательно $r_x \geq \frac{r_p}{\sqrt{2}}$. И, наконец, если x типа 3, то $r_p \leq L$, где L длина наименьшего ребра тетраэдра, разделенного с помощью x . Алгоритм разделяет этот тетраэдр только если $R > L\rho_0$, но тогда $r_x = R > L\rho_0 \geq \rho_0 r_p$. \square

Завершение

Лемма о радиусе ограничивает возможную скорость убывания радиуса добавления. Наша цель состоит в таком выборе единственной независимой константы ρ_0 , что радиус добавления будет ограничен снизу. Как только мы этого достигнем, мы сможем доказать, что алгоритм завершает работу с помощью стандартных аргументов об упаковке. На рисунке 4.11 показаны возможные типа отношений предок-потомок между тремя возможными типами добавленных точек. Мы проходим по ребру на-

Рис. 4.11: Предки и потомки.

правленного графа если радиус добавления точки x меньше чем $f(x)$. Ребро помечено наименьшим возможным множителем между радиусом добавления точки x и радиусом добавления ее родителя. Отметим, что у нас нет ребер из типа 1 в тип 2 и у нас нет петель из типа 1 снова в тип 1 и из типа 2 снова в тип 2, так как ограничения на углы изначального полиэдра запрещают отношения предок-потомок между точками на отрезках и гипергранях с непустым пересечением. Если есть такое отношение между точками на отрезках и гипергранях с пустым пересечением, то $r_x \geq f(x)$ и мы не обязаны следовать по ребру в этом направленном графе.

Отметим, что любой цикл в ориентированном графе содержит ребро, помеченное ρ_0 и ведущее в тип 3. Мы выберем $\rho_0 \geq 2$, чтобы гарантировать, что произведение меток на ребрах любого цикла было 1 или больше. Следовательно произведение меток на ребрах любого пути не меньше $\frac{1}{2}$. В случаях когда r_x меньше $f(x)$ существует предшествующая точка q , для которой $r_x \geq \frac{r_q}{2}$ и $r_q \geq f(q)$. В силу того, что $f(x)$ отделена от нуля некоторой положительной константой, радиус добавления не может стать сколь угодно малым. Отсюда следует, что алгоритм улучшения Делоне заканчивает свою работу. Для $\rho_0 < 2$ существует случаи, в которых алгоритм не остановится.

Градуированные сетки

С помощью небольших дополнительных усилий можно показать, что при $\rho_0 > 2$ радиусы добавления непосредственно связаны с внутренним радиусом точки, а не только посредством цепи предшественников. Мы начнем с оценки отношения локального радиуса точки и радиуса добавления для вершины и ее прародителя.

Лемма 4.8 (Лемма об отношении). *Пусть x — вершина триангуляции Делоне с прародителем p , предположим, что $r_x \geq c \cdot r_p$. Тогда*

$$\frac{f(x)}{r_x} \leq 1 + \frac{f(p)}{c \cdot r_p}.$$

Доказательство. Мы знаем, что $r_x = \|x - p\|$ если p вершина триангуляции Делоне и $r_x \geq \|x - p\|$ если p отклоненная середина отрезка или центр описанной окружности. Используя условия Липшица, получаем

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(p) + \|x - p\| \\ &\leq \frac{f(p)}{c \cdot r_p} \cdot r_x + r_x, \end{aligned}$$

и необходимое утверждение получается после деления на r_x . \square

Для подготовки следующего шага предположим, что $\rho_0 > 2$ и определим константы

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(3 + \sqrt{2})\rho_0}{\rho_0 - 2}, \\ C_2 &= \frac{(1 + \sqrt{2})\rho_0 + \sqrt{2}}{\rho_0 - 2}, \\ C_3 &= \frac{\rho_0 + 1 + \sqrt{2}}{\rho_0 - 2}. \end{aligned}$$

Отметим, что $C_1 > C_2 > C_3 > 1$.

Лемма 4.9 (Лемма об инварианте). *Если x вершина типа i в триангуляции Делоне ($1 \leq i \leq 3$), то $r_x \geq \frac{f(x)}{C_i}$.*

Доказательство. Если родитель p точки x есть вершина P , то $r_x \geq f(x)$ и утверждение доказано. В другом случае, предположим индуктивно, что утверждение верно для вершины p . Мы завершим доказательство, разобрав все случаи. Если x типа 3, то $c = \rho_0$ и $r_x \geq \rho_0 \cdot r_p$ по лемме о радиусе. По индукции вне зависимости от типа p имеет место неравенство $f(p) \leq C_1 r_p$. Используя лемму об отношении, мы получаем, что

$$\frac{f(x)}{r_x} \leq 1 + \frac{C_1}{\rho_0} = C_3.$$

Если x типа 2, то $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Неравенство $r_x \geq f(x)$ верно если только p не типа 3 и тогда $f(p) \leq C_3 r_p$ по предположению индукции. Тогда $r_x \geq \frac{r_p}{\sqrt{2}}$ по лемме о радиусе и

$$\frac{f(x)}{r_x} \leq 1 + \sqrt{2} \cdot C_3 = C_2$$

по лемме об отношении. Если x типа 1, то $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Неравенство $r_x \geq f(x)$ верно если только p не типа 2 или 3 и тогда $f(p) \leq C_2 r_p$ по предположению индукции. Тогда $r_x \geq \frac{r_p}{\sqrt{2}}$ по лемме о радиусе и

$$\frac{f(x)}{r_x} \leq 1 + \sqrt{2} \cdot C_2 = C_1$$

по лемме об отношении. □

В силу того, что C_1 является максимальной константой из всех трех, мы можем упростить лемму об инварианте до вида $r_x \geq \frac{f(x)}{C_1}$ для любой вершины x триангуляции Делоне. Откуда с использованием аргументов из доказательства леммы о наименьшем расстоянии из раздела 2.3 несложно получить неравенство

$$\|x - y\| \geq \frac{f(x)}{1 + C_1}$$

для любой пары вершин x, y триангуляции Делоне.

4.4 Выделение воздушного змея

Тетраэдр, похожий на воздушного змея, единственный тетраэдр малого объема, для которого отношение радиуса описанной сферы и длине наименьшей стороны не увеличивается при уменьшении объема. Экспериментальные исследования показывают, что воздушные змеи часто существуют между “хорошими” тетраэдрами триангуляции Делоне. В этом разделе показывается как веса точек могут быть использованы для того, чтобы избавиться от воздушных змеев.

Периодические сетки

Пусть S конечное множество точек \mathbb{R}^3 , триангуляция Делоне которого обладает свойством отношения ρ_0 . Наша цель — показать, что мы можем так назначить веса данным точкам, в взвешенной триангуляции Делоне не будет воздушных змеев. Это может быть неверно в общем случае, например когда все множество состоит из четырех точек, образующих воздушный змей, и тогда никакие веса на смогут от этого избавиться. Мы сможем избежать этого и других граничных эффектов заменив конечное на периодическое множество $S = P + \mathbb{Z}^3$, где P конечное множество в полуоткрытом единичном кубе $[0, 1)^3$, а \mathbb{Z}^3 — трехмерная целочисленная решетка. Периодическое множество S содержит все точки вида $p + \mathbf{v}$, где p точка из P , а \mathbf{v} целочисленный вектор. Как и S , триангуляция Делоне D множества S является периодической. А именно, для каждого тетраэдра $\tau \in D$ его параллельные копии $\tau + \mathbb{Z}^3$ тоже принадлежат D . Данная идея показана для трех точек в полуоткрытом единичном квадрате на рисунке 4.12.

Рис. 4.12: Периодическое множество.

Назначение веса

Назначение весов это функция $\omega : P \rightarrow \mathbb{R}$. Итоговое множество сфер обозначается $S_\omega = \{(a, \omega(p)) | p \in P, a \in p + \mathbb{Z}^3\}$. В зависимости от ω точка p может быть или не быть вершиной взвешенной триангуляции Делоне множества S_ω , которая обозначается D_ω . Пусть $N(p)$ минимальное расстояние от p до другой точки из S . Чтобы избежать появления избыточных точек, мы ограничимся *мягкими* назначениями веса, для которых $0 \leq \omega(p) \leq \frac{N(p)}{3}$ для всех $p \in P$. У каждой сферы из S_ω действительный радиус, любые две сферы не пересекаются и не содержатся одна внутри в другой. Отсюда следует, что все точки являются неизбыточными. Другая польза от мягкого назначения весов состоит в том, что оно не сильно меняет форму треугольников и тетраэдров. В частности D_ω обладает свойство отношения ρ_1 , которое зависит только от ρ_0 . Отсюда следует, что площадь любого треугольника ограничена снизу константой, умноженной на квадрат радиуса описанной окружности. Аналогичное неверно для объема тетраэдра, поэтому от воздушных змеев не так просто избавиться.

Основной шаг для удаления воздушных змеев состоит в обобщении леммы о степени из раздела 4.2. Пусть K — множество симплексов, которые появляются в взвешенной триангуляции Делоне для мягких назначений весов множества S . Другими словами $K = \bigcup_\omega D_\omega$, что является трехмерным симплициальным комплексом, который не обязательно геометрически реализуем в \mathbb{R}^3 . Множество вершин K это множество S , *степень* вершины это количество ребер из K , которые ее содержат.

Лемма 4.10 (Лемма о взвешенной степени). *Существует константа δ_1 , зависящая только от ρ_0 , что степень вершины в K не больше δ_1 .*

Доказательство не очень интересно частично повторяет доказательства Леммы о вариации длины и Леммы о степени из раздела 4.2. Поэтому мы его приводить не будем.

Разрезание ортогональных сфер

Нам понадобится элементарный факт о сферах (a, A^2) и (z, Z^2) , которые ортогональны, то есть $\|a - z\|^2 = A^2 + Z^2$. Плоскость пересекает каждую из сфер по окружности, возможно мнимого радиуса.

Лемма 4.11 (Лемма о разрезании). *Плоскость, проходящая через a , пересекает две сферы по ортогональным окружностям.*

Доказательство. Пусть (x, X^2) и (y, Y^2) — окружности, по которым пересечены сферы. Мы знаем, что $x = a$ и $X^2 = A^2$, кроме того $Y^2 = Z^2 - \|z - y\|^2$. Следовательно

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|x - z\|^2 - \|z - y\|^2 \\ &= (A^2 + Z^2) - (Z^2 - Y^2) \\ &= X^2 + Y^2. \end{aligned}$$

Другими словами, окружности ортогональны. □

В качестве приложения леммы о разрезании, рассмотрим три сферы и плоскость, проходящую через их центры как на рисунке 4.13. Плоскость пересекает эти три сферы по трем окружностям и найдется ровно одна окружность, которая ортогональна этим трем. Из леммы о разрезании следует, что любая сфера, ортогональная трем изначальным, пересекает данную плоскость по построенной окружности.

Рис. 4.13: Три сферы и плоскость.

Вариация орторадиуса

Другой важный шаг для избавления от воздушных змеев это анализ стабильности их ортосфер. Мы увидим, что даже небольшое изменение весов может существенно увеличить радиус ортосферы. Это может быть использовано, так как тетраэдра из D_ω не может иметь большой радиус ортосферы, иначе эта ортосфера будет ближе чем ортогональна к какой-либо взвешенной точке. В дальнейшем мы используем это наблюдение и изменим веса так, чтобы увеличить ортосферы воздушных змеев.

Выясним как радиус ортосферы четырех сфер меняется, если мы меняем вес одной из них. Пусть (y, Y^2) наименьшая сфера ортогональная первым трем сферам, (p, P^2) — четвертая сфера, а (z, Z^2) — ортосфера всех четырех сфер, как это показано на рисунке 4.14. Пусть ζ и φ расстояния от z и p до плоскости h , которая проходит

Рис. 4.14: Вариация орторадиуса.

через центры первых трех сфер. При вариации P^2 центр ортосферы движется по прямой, которая пересекает h в точке y и ортогональна h . Расстояние от z до h это функция веса точки p , $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Лемма 4.12 (Лемма о вариации расстояния). $\zeta(P^2) = \zeta(0) - \frac{P^2}{2\varphi}$.

Доказательство. Пусть λ расстояние от p до прямой, по которой движется z . Верно равенство $Z^2 + P^2 = (\zeta(P^2) - \varphi)^2 + \lambda^2$. Вес ортосферы равен $Z^2 = \zeta(P^2)^2 + Y^2$. Следовательно

$$\begin{aligned}\zeta(P^2)^2 &= Z^2 - Y^2 \\ &= (\zeta(P^2) - \varphi)^2 + \lambda^2 - P^2 - Y^2.\end{aligned}$$

После сокращения $\zeta(P^2)^2$, получаем

$$\zeta(P^2) = \frac{\varphi^2 + \lambda^2 - Y^2}{2\varphi} - \frac{P^2}{2\varphi}.$$

Первое слагаемое в правой части равно $\zeta(0)$. □

Слагаемое $\frac{P^2}{2\varphi}$ это перемещение ортоцентра, которое возникает при изменении веса точки p с 0 до P^2 . Для воздушных змеев значение φ мало, а значит перемещение велико.

Теорема о воздушных змеях

В завершении мы покажем, что существует мягкое назначение весов, при котором все воздушные змеи будут удалены. Доказательство конструктивно и добавляет веса точкам из P последовательно. Для количественного выражения понятию быть воздушным змеем, введем $\xi = \frac{V}{L}$, где V — объем тетраэдра, а L — длина наименьшего

ребра. Только воздушные змеи могут иметь ограниченное отношение $\frac{R}{L}$ одновременно с малым ξ . Отметим, что объем тетраэдра, изображенного на рисунке 4.14 равен одной трети площади треугольного основания, умноженной на φ . Как было отмечено выше площадь основания это константа, умноженная на Y^2 . Аналогично L есть положительная часть от Y , откуда следует, что ξ есть положительная часть от $Y\varphi$.

Теорема 4.13 (Теорема о воздушных змеях). *Существуют такие положительные константы ρ_1 и ξ_0 и мягкое назначение весов ω , что все тетраэдры взвешенной триангуляции Делоне D_ω обладают свойством отношения ρ_1 и $\xi > \xi_0$.*

Доказательство. Мы сконцентрируемся на доказательстве неравенств $\xi > \xi_0$ для каждого тетраэдра из D_ω . Без ограничения общности предположим, что расстояние от p до ближайшего соседа из S есть $N(p) = 1$. Вес, назначенные точке p , может быть произвольным в интервале $[0, \frac{1}{3}]$. Согласно лемме о взвешенной степени, найдется не более константы тетраэдров, которые могут быть в звезде p . Каждый такой тетраэдр может лежать в D_ω если только радиус его ортосферы не очень большой. Другими словами, каждый тетраэдр существует только если $\omega(p)$ лежит в каком-то интервале внутри отрезка $[0, \frac{1}{3}]$. Из леммы о вариации длины следует, что длина этого подинтервала уменьшается линейно по φ , а значит линейно по ξ . Мы можем выбрать ξ_0 достаточно малым, чтобы наше фиксированное количество подинтервалов не могло покрыть отрезок $[0, \frac{1}{3}]$. По принципу Дирихле найдется значение $\omega(p) \in [0, \frac{1}{3}]$, при котором в звезде p нет ни одного воздушного змея. \square

Удаление воздушных змеев

Доказательство теоремы о воздушных змеях предлагает алгоритм, который назначает веса отдельным точкам в произвольной последовательности. Для каждой точки $p \in P$ алгоритм рассматривает интервал из возможных весов и подинтервалы, в которых тетраэдры из K могут возникнуть в взвешенной триангуляции Делоне. Мы могли бы рассматривать все тетраэдры из K в звезде p , но гораздо удобнее рассматривать только подмножество в однопараметрическом семействе взвешенных триангуляций Делоне, порожденных непрерывно увеличивающимся весов точки p от 0 до $\frac{N(p)}{3}$. Для каждого такого тетраэдра мы знаем значение ξ и подинтервал, в течении которого он присутствует в D_ω . На рисунке 4.15 каждый тетраэдр изображен горизонтальным отрезком на $\omega\xi$ -плоскости. Множество, расположенное под

Рис. 4.15: $\omega\xi$ -плоскость.

всеми отрезками, это функция, которая отображает вес p в наихудшее значение ξ всех тетраэдров из звезды p . Алгоритм находит вес, при котором эта функция достигает своего максимума, и приписывает его точке p . В силу того, что всего у нас не более константы тетраэдров в звезде, это может быть сделано за константное время. Таким образом, общее время работы алгоритма $O(n)$, где n количество точек в P .

Возможный источник для волнений заключается в том, что после того как мы зафиксировали вес точки p мы можем изменить вес ее соседа — точки q . Изменение веса q может изменить звезду p . Однако, все новые тетраэдры в звезде p также принадлежат и звезде q и не могут иметь сколь угодно малые значения ξ . Таким образом

нам не нужно заново рассматривать точку p и оценка $O(n)$ на самом деле достигается. Теорема о воздушных змеях гарантирует, что алгоритм успешен и достигает константы ξ_0 . Хотя алгоритм и не находит глобального оптимального назначения весов, он находит оптимальный вес для каждой индивидуальной точки, предполагая, что веса остальных точек неизменны. Следовательно, возможно в результате мы получим минимальное значение ξ , которое будет существенно лучше достаточно пессимистичной оценки ξ_0 , гарантированной нам теоремой о воздушных змеях.

Задачи

1. **Удаление вершин** (два балла). Пусть P выпуклый многогранник в \mathbb{R}^3 с n вершинами. Докажите, что P можно разбить на тетраэдры, удалив одну из вершин u , заменив P на выпуклую оболочку оставшихся вершин и добавив тетраэдры с вершиной в u и основаниями на границе усеченного P . Докажите, что существует такое упорядочивание вершин P , что в результате получается не более $3n - 11$ тетраэдров.
2. **Внутренние ребра** (два балла). Пусть P выпуклый многогранник в \mathbb{R}^3 с n вершинами и K его триангуляция, вершинами которой являются только вершины P . *Внутреннее ребро* это ребро K , которое проходит внутри P .
 - (i) Докажите, что если у K нет внутренних ребер, то в K ровно $n - 3$ тетраэдра.
 - (ii) Сколько тетраэдров в K если в ней ровно t внутренних ребер?
3. **Разрезание куба на тетраэдры** (два балла). Рассмотрим единичный куб $[0, 1]^3$ и его триангуляцию K , вершинами которой являются только восемь вершин куба.
 - (i) Докажите, что K содержит пять или шесть тетраэдров.
 - (ii) Нарисуйте все неизоморфные триангуляции и их дуальные графы.
4. **ВСС тетраэдр** (один балл). *Объемо центрированная кубическая решетка* (ВСС, body centered cubic lattice) состоит из всех целых точек (i, j, k) , у которых все координаты одной четности. Все тетраэдры Делоне решетки ВСС конгруэнтны одному тетраэдру, который мы будем называть *ВСС тетраэдром*. Чему равно отношение радиуса описанной сферы к длине наименьшего ребра для этого тетраэдра?
5. **Упаковка** (три балла). Семейство замкнутых единичных шаров в \mathbb{R}^3 называется *упаковкой* если шары не пересекаются по внутренним точкам. Упаковка называется *максимальной* если к ней нельзя добавить ни одного единичного шара, чтобы он не пересекался по внутренним точкам с уже существующими шарами. Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^3$ такое множество точек, что $S + \mathbb{B}^3$ максимальная упаковка.
 - (i) Докажите, что после увеличения шаров в два раза мы получим покрытие пространства, то есть

$$\bigcup (S + 2\mathbb{B}^3) = \mathbb{R}^3.$$

- (ii) Докажите, что ребра триангуляции Делоне множества S имеют длину не больше 4.
 - (iii) Докажите, что существует такая константа c , что любая вершина в триангуляции Делоне множества S принадлежит не более чем c ребрам.
6. **Грани полиэдра** (один балл). Используя определение из раздела 4.1, посчитайте количество одномерных и двумерных граней у полиэдра, изображенного на рисунке 4.16. Сколько одномерных и двумерных граней имеют более одной

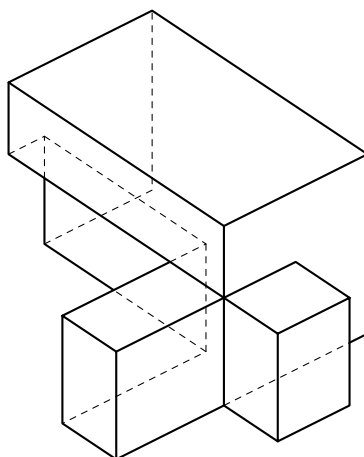


Рис. 4.16: Невыпуклый полиэдр.

связной компоненты?

7. **Углы тетраэдра** (три балла). Пусть $abcd$ тетраэдр в \mathbb{R}^3 , \mathbb{S}^2 — единичная сфера с центром в начале координат, а ε достаточно малый параметр. Напомним, что площадь \mathbb{S}^2 равняется 4π .
- (i) *Телесный угол* в вершине a это часть сферы $a + \varepsilon\mathbb{S}^2$, которая находится внутри тетраэдра. Докажите, что сумма телесных углов в вершинах a, b, c, d это действительное число между нулем и 2π .
 - (ii) *Двугранный угол* при ребре ab это часть сферы $x + \varepsilon\mathbb{S}^2$, которая находится внутри тетраэдра, где x это произвольная точка внутри ребра ab . Докажите, что сумма двугранных углов при ребрах ab, ac, ad, bc, bd, cd это действительное число между 2π и 3π .
 - (iii) Докажите, что удвоенная сумма двугранных углов превосходит сумму четырех телесных углов на 4π .